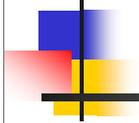


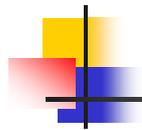
天体の回転運動 理論入門(下)



福島登志夫

国立天文台、総合研究大学院大学

2005



目次(0-6は上巻)

- 0.概要
- 1.剛体
- 2.回転の数学
- 3.回転の物理学
- 4.自由回転
- 5.楕円関数
- 6.強制回転
- 7.回転の解析力学
- 8.回転の数値積分
- 9.非剛体効果
- 10.応用
- 11.相対論効果
- 12.参考文献

7. 回転運動の解析力学

- 解析力学の二大形式: ラグランジュとハミルトン
- 一般化座標: オイラー角 $\mathbf{q} = (\psi, \theta, \phi)^T$ $\dot{\mathbf{q}} = \frac{d\mathbf{q}}{dt}$
- ラグランジアン (Lagrangian)
 - T: 運動エネルギー $\mathcal{L}(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) \equiv T(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) - U(\mathbf{q}, t)$
 - U: ポテンシャル・エネルギー, $V = -U$: 力(ちから)関数
- ラグランジュの運動方程式: 一般化力 \mathbf{F}

$$\frac{d}{dt} \left[\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)_{\mathbf{q}} \right] = \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{q}} \right)_{\dot{\mathbf{q}}} + \mathbf{F} \rightarrow \frac{d}{dt} \left[\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)_{\mathbf{q}} \right] = \left(\frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} \right)_{\dot{\mathbf{q}}} - \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{q}} \right)_{\dot{\mathbf{q}}} + \mathbf{F}$$

角速度と角度時間変化

- 角速度ベクトル ω と一般化座標 q の時間変化

$$\omega_A = \dot{\psi} \sin \theta \sin \phi + \dot{\theta} \cos \phi, \omega_B = \dot{\psi} \sin \theta \cos \phi - \dot{\theta} \sin \phi, \omega_C = \dot{\psi} \cos \theta + \dot{\phi}$$

- 行列表現 $\omega = Q(q)\dot{q}$

$$\begin{pmatrix} \omega_A \\ \omega_B \\ \omega_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ \sin \theta \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \cos \theta & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\phi} \end{pmatrix}$$

運動エネルギーの定義

- 運動エネルギー

$$2T = aL_A^2 + bL_B^2 + cL_C^2 = A\omega_A^2 + B\omega_B^2 + C\omega_C^2$$

- 一般化座標 \mathbf{q} と \mathbf{q} の時間変化による表現

$$2T(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}) = \boldsymbol{\omega}^T \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{K}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}$$

- 係数行列

- 一般化座標に依存することに注意

$$\mathbf{K}(\mathbf{q}) \equiv \mathbf{Q}(\mathbf{q})^T \mathbf{I} \mathbf{Q}(\mathbf{q})$$

運動エネルギーの表現

- 係数行列の具体的表現(問:示せ)

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} K_{\psi\psi} & K_{\psi\theta} & C \cos \theta \\ K_{\psi\theta} & K_{\theta\theta} & 0 \\ C \cos \theta & 0 & C \end{pmatrix}$$

$$K_{\psi\psi} = C - \left[\frac{2C - (A+B)}{2} \right] \sin^2 \theta - \left(\frac{A-B}{2} \right) \sin^2 \theta \cos 2\phi$$

$$K_{\psi\theta} = \left(\frac{A-B}{2} \right) \sin \theta \sin 2\phi, \quad K_{\theta\theta} = \left(\frac{A+B}{2} \right) + \left(\frac{A-B}{2} \right) \cos 2\phi$$

Tの角度偏微分

- 角度偏微分のベクトル表現 $\left(\frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}}\right)_{\dot{\mathbf{q}}} = \dot{\mathbf{q}}^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{q}}\right) \dot{\mathbf{q}}$

- 歳差角による偏微分=0 $\left(\frac{\partial T}{\partial \psi}\right)_{\dot{\mathbf{q}}} = 0$
 - 問: 物理的意味を答えよ

- 回転角による偏微分
=0 if A=B $\left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \phi}\right)_{\psi, \theta} = \begin{pmatrix} K_{\psi\psi, \phi} & K_{\psi\theta, \phi} & 0 \\ K_{\psi\theta, \phi} & K_{\theta\theta, \phi} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
 - 問: 物理的意味を答えよ

$$K_{\psi\psi, \phi} = (A - B) \sin^2 \theta \sin 2\phi, \quad K_{\psi\theta, \phi} = (A - B) \sin \theta \cos 2\phi,$$

$$K_{\theta\theta, \phi} = -(A - B) \sin 2\phi$$

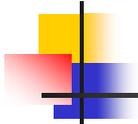
Tの角度偏微分(2)

- 傾斜角による偏微分

$$\left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \theta}\right)_{\psi, \phi} = \begin{pmatrix} K_{\psi\psi, \theta} & K_{\psi\theta, \theta} & -C \sin \theta \\ K_{\psi\theta, \theta} & 0 & 0 \\ -C \sin \theta & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$K_{\psi\psi, \theta} = \left(\frac{2C - A + B}{4}\right) \sin 2\theta - \left(\frac{A - B}{4}\right) \sin 2\theta \cos 2\phi$$

$$K_{\psi\theta, \theta} = \left(\frac{A - B}{2}\right) \cos \theta \sin 2\phi$$



力(ちから)関数の表現

- $V = -U$ は慣性主軸系の基底行列にのみ依存

$$V = V(\mathbf{e}_A, \mathbf{e}_B, \mathbf{e}_C)$$

- 例: 外部質点による2次潮汐力関数

$$V_2 = \frac{3\mu}{4r^3} \left[(A+B-2C)n_C^2 + (B-A)(n_A^2 - n_B^2) \right]$$

$$n_A = \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_A, n_B = \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_B, n_C = \mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_C, \mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$$

Vの展開

- 外部質点と有限体間の万有引力の場合

$$V = \mu \int \frac{\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{r} - \mathbf{x}|} d^3\mathbf{x} = V_0 + V_1 + V_2 + \dots$$

$$V_0 = \frac{\mu M}{r}$$

- 0次項は有限体の向きに非依存

$$V_1 = 0$$

- 1次項は重心の定義より=0

- 2次項はA,B,Cで書ける

$$\begin{pmatrix} r_A \\ r_B \\ r_C \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \beta \cos \lambda \\ \cos \beta \sin \lambda \\ \sin \beta \end{pmatrix}$$

- MacCullaghの公式(問: 示せ)

$$V_2 = \frac{\mu}{r^3} \left[\left(\frac{A+B}{2} - C \right) P_2(\sin \beta) + \left(\frac{B-A}{4} \right) P_2^2(\sin \beta) \cos 2\lambda \right]$$

$$P_2(x) = \frac{3x^2 - 1}{2}$$

$$P_2^2(x) = 3(1 - x^2)$$

Vの角度偏微分公式

- 任意の角による偏微分 $\frac{\partial V}{\partial \varphi} = \sum_{J=A,B,C} \left(\frac{\partial \mathbf{e}_J}{\partial \varphi} \right) \cdot \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{e}_J} \right)$
- 無限小回転のベクトル表現の応用 $\frac{\partial \mathbf{e}_J}{\partial \varphi} = \mathbf{e}_\varphi \times \mathbf{e}_J$
 - 基底の偏微分 = 回転軸とのベクトル積
- トルクとの関係式 $\frac{\partial V}{\partial \varphi} = -\mathbf{e}_\varphi \cdot \mathbf{N}$ $\mathbf{N} \equiv - \sum_{J=A,B,C} \mathbf{e}_J \times \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{e}_J} \right)$
- トルクの一般定義
 - 特にVが任意ベクトルrの慣性主軸成分の関数の場合 $V = V(r_A, r_B, r_C) \rightarrow \mathbf{N} = -\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ $\mathbf{F} \equiv \frac{\partial V}{\partial \mathbf{r}}$

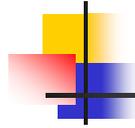
Vの偏微分とトルク

- 慣性主軸系表現(問:導け)

$$N_A = -\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)_{\psi, \phi} \cos \phi - \left(\frac{\partial V}{\partial \lambda}\right) \sin \phi$$

$$N_B = \left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)_{\psi, \phi} \sin \phi - \left(\frac{\partial V}{\partial \lambda}\right) \cos \phi$$

$$N_C = -\left(\frac{\partial V}{\partial \phi}\right)_{\psi, \theta} \quad \frac{\partial V}{\partial \lambda} \equiv \frac{1}{\sin \theta} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial \psi}\right)_{\theta, \phi} - \left(\frac{\partial V}{\partial \phi}\right)_{\psi, \theta} \cos \theta \right]$$



Vの偏微分とトルク(2)

- 慣性系表現(問: 慣性主軸系表現から導け)

$$N_X = -\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)_{\psi, \phi} \cos \psi - \left(\frac{\partial V}{\partial \phi}\right) \sin \psi$$

$$N_Y = -\left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)_{\psi, \phi} \sin \psi + \left(\frac{\partial V}{\partial \phi}\right) \cos \psi$$

$$N_Z = -\left(\frac{\partial V}{\partial \psi}\right)_{\theta, \phi} \quad \frac{\partial V}{\partial \phi} \equiv \frac{1}{\sin \theta} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial \phi}\right)_{\psi, \theta} - \left(\frac{\partial V}{\partial \psi}\right)_{\theta, \phi} \cos \theta \right]$$

ラグランジュの運動方程式

- ラグランジュ(Lagrange)の運動方程式の書換え

$$\frac{d(\mathbf{K}\dot{\mathbf{q}})}{dt} = \mathbf{K} \frac{d^2\mathbf{q}}{dt^2} + \dot{\mathbf{q}}^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{q}} \right)_{\dot{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{q}} \right)_{\dot{\mathbf{q}}} \dot{\mathbf{q}} + \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}} \right)_{\dot{\mathbf{q}}} + \mathbf{F}$$

- 2階常微分方程式へ変換

$$\frac{d^2\mathbf{q}}{dt^2} = -\mathbf{K}^{-1} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\mathbf{q}}{dt} \right)^T \left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{q}} \right)_{\dot{\mathbf{q}}} \left(\frac{d\mathbf{q}}{dt} \right) - \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}} \right)_{\dot{\mathbf{q}}} - \mathbf{F} \right]$$

- $A < B$ の場合: 係数行列 \mathbf{K} の**非対角性**による煩雑さ
 - ラグランジュ形式からハミルトン形式へ

ラグランジュの 運動方程式 (A=Bの場合)

- 仮定: 一般化力の回転角成分=0 $F_\phi = 0$

- →積分: 角速度のC軸成分

$$\omega_c \equiv \left(\frac{d\phi}{dt} \right) + \left(\frac{d\psi}{dt} \right) \cos \theta$$

- 運動方程式 (問: 導け)

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = \frac{1}{\sin \theta} \left(\frac{d\theta}{dt} \right) \left[\frac{C\omega_c}{A} - 2 \left(\frac{d\psi}{dt} \right) \cos \theta \right] + \frac{1}{A \sin^2 \theta} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial \psi} \right)_{\theta, \phi} - F_\psi \right]$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\sin \theta \left(\frac{d\psi}{dt} \right) \left[\frac{C\omega_c}{A} - \left(\frac{d\psi}{dt} \right) \cos \theta \right] + \frac{1}{A} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial \theta} \right)_{\psi, \phi} - F_\theta \right]$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_c - \left(\frac{d\psi}{dt} \right) \cos \theta$$

ポアソン近似の 運動方程式 (A=Bの場合)

- ポアソン近似

- 微小量を無視
- 問: 近似の物理的意味を説明せよ

- 近似運動方程式

- 問: 導け

$$\left| \frac{d^2\psi}{dt^2} \right|, \left| \frac{d^2\theta}{dt^2} \right|, \left| \frac{d\psi}{dt} \right| \left| \frac{d\theta}{dt} \right|, \left| \frac{d\psi}{dt} \right|^2 \approx 0$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{C\omega_c \sin\theta} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial \theta} \right)_{\psi, \phi} - F_\theta \right]$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{-1}{C\omega_c \sin\theta} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial \psi} \right)_{\theta, \phi} - F_\psi \right]$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_c - \left(\frac{d\psi}{dt} \right) \cos\theta$$

一般化運動量

- 定義

$$\mathbf{p} \equiv \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)_{\mathbf{q}} = \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)_{\mathbf{q}} = \mathbf{K} \left(\frac{d\mathbf{q}}{dt} \right)$$

- 注意: 非剛体など $\mathbf{I} = \mathbf{I}(d\mathbf{q}/dt)$ の場合は **要注意**

- オイラー角に対応する一般化運動量

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_{\psi} \\ p_{\theta} \\ p_{\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{\psi\psi}\dot{\psi} + K_{\psi\theta}\dot{\theta} + (C \cos \theta)\dot{\phi} \\ K_{\psi\theta}\dot{\psi} + K_{\theta\theta}\dot{\theta} \\ (C \cos \theta)\dot{\psi} \qquad \qquad \qquad + C\dot{\phi} \end{pmatrix}$$

一般化運動量(2)

- 角運動量

$$\begin{pmatrix} L_A \\ L_B \\ L_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_\theta \cos \phi + p_\lambda \sin \phi \\ -p_\theta \sin \phi + p_\lambda \cos \phi \\ p_\phi \end{pmatrix}$$

$$p_\lambda \equiv \frac{p_\psi - p_\phi \cos \theta}{\sin \theta}$$

- 運動エネルギー: まだ複雑な表現(問: 示せ)

$$4T = 2cp_\phi^2 + (a+b)(p_\theta^2 + p_\lambda^2) + (a-b)\left[(p_\theta^2 - p_\lambda^2)\cos 2\phi + 2p_\theta p_\lambda \sin 2\phi\right]$$

ハミルトニアン

- 仮定: 一般化力 $F=0$ (すなわち散逸なし)
- ハミルトニアン(Hamiltonian)の定義

$$\mathcal{H} \equiv \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{p} - \mathcal{L} = T + U = T - V$$

- ハミルトンの運動方程式

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = - \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{q}} \right)_{\mathbf{p}} = - \left(\frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} \right)_{\mathbf{p}} + \left(\frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}} \right)_{\mathbf{p}}$$

$$\frac{d\mathbf{q}}{dt} = \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \mathbf{p}} \right)_{\mathbf{q}} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{p}$$

Tの角度偏微分(3)

- 再び偏微分実行時の**固定変数の違い**に注意
- オイラー角の場合: まだ複雑な表現

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \psi}\right)_{\mathbf{p}, \theta, \phi} = 0 \quad \left(\frac{\partial T}{\partial \phi}\right)_{\mathbf{p}, \psi, \theta} = \left(\frac{a-b}{2}\right) \left[-(p_\theta^2 - p_\lambda^2) \sin 2\phi + 2p_\theta p_\lambda \cos 2\phi \right]$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \theta}\right)_{\mathbf{p}, \psi, \phi} = \left[\left(\frac{a+b}{2}\right) p_\lambda - \left(\frac{a-b}{2}\right) (p_\lambda \cos 2\phi - p_\theta \sin 2\phi) \right] \left(\frac{\partial p_\lambda}{\partial \theta}\right)$$

$$\mathbf{p} = (p_\psi, p_\theta, p_\phi)^\top \quad p_\lambda \equiv \frac{p_\psi - p_\phi \cos \theta}{\sin \theta} \quad \left(\frac{\partial p_\lambda}{\partial \theta}\right)_{\mathbf{p}, \psi, \phi} = \frac{p_\phi - p_\psi \cos \theta}{\sin^2 \theta}$$

■ セレの正準変数

- 別名: アンドワイエ正準変数
- セレの正準変換 (Serret 1866)

$$(p_\psi, p_\theta, p_\phi; \psi, \theta, \phi) \rightarrow (L \equiv p_\phi, G \equiv |\mathbf{L}|, H \equiv p_\psi; l, g, h)$$

- 母関数: 新作用変数と旧角変数の関数

$$S \equiv \int p_\psi d\psi + \int p_\theta d\theta + \int p_\phi d\phi = L\phi + H\psi + \int p_\theta d\theta$$

$$p_\theta = -\sqrt{G^2 - L^2 - \left(\frac{H - L \cos \theta}{\sin \theta}\right)^2}$$

セレの正準角変数

■ セレ角変数の表現

■ 母関数による定義 → 難解な表現

$$\begin{aligned} \ell &\equiv \left(\frac{\partial S}{\partial L} \right)_{G,H,\phi,\theta,\psi} = \phi - \int \frac{(L \cos 2\theta - H \cos \theta) d\theta}{\sin \theta \sqrt{G^2 \sin^2 \theta - H^2 + 2HL \cos \theta - L^2}} \\ g &\equiv \left(\frac{\partial S}{\partial G} \right)_{L,H,\phi,\theta,\psi} = - \int \frac{G \sin \theta d\theta}{\sqrt{G^2 \sin^2 \theta - H^2 + 2HL \cos \theta - L^2}} \\ h &\equiv \left(\frac{\partial S}{\partial H} \right)_{L,G,\phi,\theta,\psi} = \psi - \int \frac{(L \cos \theta - H) d\theta}{\sin \theta \sqrt{G^2 \sin^2 \theta - H^2 + 2HL \cos \theta - L^2}} \end{aligned}$$

補助角

- 補助角 I, J, i, j の導入

$$G \cos I \equiv H, G \cos J \equiv L$$

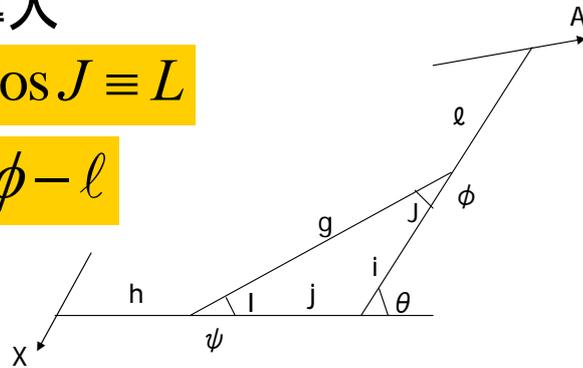
$$j \equiv \psi - h, i \equiv \phi - \ell$$

- 幾何学的関係図

- 証明は面倒

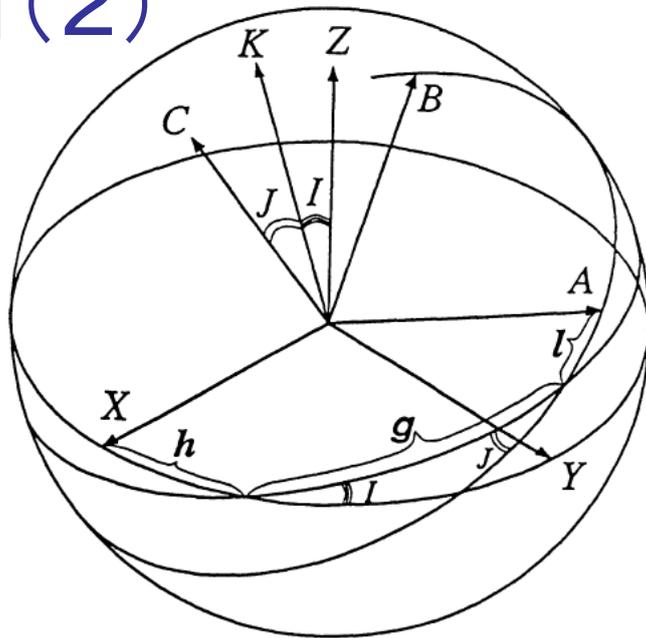
- 具体的関係式は？

$$j = j(I, g, J), \theta = \theta(I, g, J), i = i(I, g, J)$$



補助角(2)

- 幾何学的
関係図



補助角(3)

- 行列関係式 (問: 2つ前の関係図より導け)

$$\mathbf{R}_3(i)\mathbf{R}_1(\theta)\mathbf{R}_3(j) = \mathbf{R}_1(J)\mathbf{R}_3(g)\mathbf{R}_1(I)$$

- 球面三角公式 (行列関係式から導出可)

- 第2余弦公式 $\cos \theta = \cos I \cos J - \sin I \sin J \cos g$

- 無名の公式 ($J, j \Leftrightarrow I, i$ が成立) (問: 導け)

$$\tan i = \frac{\sin g \sin I}{\sin J \cos I + \cos J \sin I \cos g}$$

補助角(4)

- オイラー角の補助角による表現

$$\psi = h + j = h + \tan^{-1} \left(\frac{\sin g \sin J}{\sin I \cos J + \cos I \sin J \cos g} \right)$$

$$\theta = \cos^{-1} (\cos I \cos J - \sin I \sin J \cos g)$$

$$\phi = \ell + i = \ell + \tan^{-1} \left(\frac{\sin g \sin I}{\sin J \cos I + \cos J \sin I \cos g} \right)$$

$I \gg J \sim 0$ のとき

- 例: 地球回転 in 黄道座標系
 - 黄道傾斜: $I \sim 23.5$ deg
 - 極運動: $J \sim 0.2$ arcsecond $\sim 10^{-6}$ radian
- 無名公式の変形: (問: 示せ)

$$i = g - \tan^{-1} \left(\frac{\sin J \cot I \sin g - \sin^2(J/2) \sin 2g}{1 + \sin J \cot I \cos g - \sin^2(J/2)(1 + \cos 2g)} \right)$$

I ≫ J ~ 0 のとき (2)

- 第2余弦公式の変形: (問: 示せ)

$$\theta = I + \tan^{-1} \left[\frac{\Delta C (2 - \Delta C \cos I - \Delta S \sin I)}{(2 \sin I - \Delta S)(1 - \Delta C \cos I - \Delta S \sin I)} \right]$$

$$\Delta C \equiv \cos I - \cos \theta = \sin J \sin I \cos g + \frac{1}{2} \sin^2 J \cos I$$

$$\Delta S \equiv \sin I - \sin \theta = \frac{-\Delta C (2 \cos I - \Delta C)}{\sin I + \sqrt{\sin^2 I + \Delta C (2 \cos I - \Delta C)}}$$

$I \gg J \sim 0$ のとき (3)

- オイラー角の補助角による近似表現
 - 問: 変形公式より導け

$$\psi \cong h + \left(\frac{J}{\sin I} \right) \sin g - \frac{J^2}{2} \cot I \sin 2g + O(J^3)$$

$$\theta \cong I + J \cos g + \frac{J^2}{2} \cot I \sin^2 g + O(J^3)$$

$$\phi \cong \ell + g - J \cot I \sin g + \frac{J^2}{2} \left(\cot^2 I + \frac{1}{2} \right) \sin 2g + O(J^3)$$

運動エネルギー

- 運動エネルギーの正準表現(問: 示せ)

$$4T = (a+b)G^2 - (a+b-2c)L^2 - (a-b)(G^2 - L^2)\cos 2\ell$$

- ℓ に関する平均化 \rightarrow GとLについて双曲型
- 特徴: TはH, g, hに**依存しない**

$$\left(\frac{\partial T}{\partial H}\right)_{L,G,\ell,g,h} = \left(\frac{\partial T}{\partial g}\right)_{L,G,H,\ell,h} = \left(\frac{\partial T}{\partial h}\right)_{L,G,H,\ell,g} = 0$$

Tの偏微分

- セレ正準変数の場合: かなり**簡単**

$$\left(\frac{\partial T}{\partial L}\right)_{G,H,\ell,g,h} = -L \left[\left(\frac{a+b}{2} - c\right) - \left(\frac{a-b}{2}\right) \cos 2\ell \right]$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial G}\right)_{L,H,\ell,g,h} = G \left[\left(\frac{a+b}{2}\right) - \left(\frac{a-b}{2}\right) \cos 2\ell \right]$$

$$\left(\frac{\partial T}{\partial \ell}\right)_{L,G,H,g,h} = \left(\frac{a-b}{2}\right) (G^2 - L^2) \sin 2\ell$$

正準運動方程式

■ ハミルトンの正準運動方程式

- (擬)作用変数: L, G, H (擬)角変数: ℓ, g, h

$$\frac{dL}{dt} = - \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \ell} \right)_{L, G, H, g, h}$$

$$\frac{d\ell}{dt} = + \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial L} \right)_{G, H, \ell, g, h}$$

$$\frac{dG}{dt} = - \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial g} \right)_{L, G, H, \ell, h}$$

$$\frac{dg}{dt} = + \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial G} \right)_{L, H, \ell, g, h}$$

$$\frac{dH}{dt} = - \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial h} \right)_{L, G, H, \ell, g}$$

$$\frac{dh}{dt} = + \left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial H} \right)_{L, G, \ell, g, h}$$

正準運動方程式(2)

- セレの正準変数の場合
- 小変動成分: G, H, h 大変動成分: L, ℓ, g

$$\frac{dG}{dt} = \left(\frac{\partial V}{\partial g} \right)_{L, G, H, \ell, h}$$

$$\frac{dH}{dt} = \left(\frac{\partial V}{\partial h} \right)_{L, G, H, \ell, g}$$

$$\frac{dh}{dt} = - \left(\frac{\partial V}{\partial H} \right)_{L, G, \ell, g, h}$$

$$\frac{dL}{dt} = - \left(\frac{a-b}{2} \right) (G^2 - L^2) \sin 2\ell + \left(\frac{\partial V}{\partial \ell} \right)_{L, G, H, g, h}$$

$$\frac{d\ell}{dt} = -L \left[\left(\frac{a+b}{2} - c \right) - \left(\frac{a-b}{2} \right) \cos 2\ell \right] - \left(\frac{\partial V}{\partial L} \right)_{G, H, \ell, g, h}$$

$$\frac{dg}{dt} = G \left[\left(\frac{a+b}{2} \right) - \left(\frac{a-b}{2} \right) \cos 2\ell \right] - \left(\frac{\partial V}{\partial G} \right)_{L, H, \ell, g, h}$$

自由回転の解

- $V=0 \rightarrow$ 解の自明な部分 $G = G_0, H = H_0, h = h_0$
- 基本方程式: 本質的自由度は**2**(問: 説明せよ)

$$\frac{dL}{dt} = -\left(\frac{a-b}{2}\right)(G_0^2 - L^2)\sin 2\ell$$

$$\frac{d\ell}{dt} = -L \left[\left(\frac{a+b}{2} - c\right) - \left(\frac{a-b}{2}\right)\cos 2\ell \right]$$

$$\frac{dg}{dt} = G_0 \left[\left(\frac{a+b}{2}\right) - \left(\frac{a-b}{2}\right)\cos 2\ell \right]$$

自由回転の解(2)

- $A=B$ (すなわち $a=b$) の場合: 簡単

- L, G, H, h は一定

$$L = L_0, G = G_0, H = H_0, h = h_0$$

- ℓ, g は時間の線形関数

$$\ell = \ell_0 + n_\ell (t - t_0), g = g_0 + n_g (t - t_0)$$

- ℓ の動きは**逆向き**で遅く、 g の動きは速い

$$n_\ell = -(a - c)L_0 < 0, n_g = aG_0 > 0$$

自由回転の軌道図

- $A < B$ の自由回転 $\rightarrow G = \text{一定} \rightarrow$ 自由度2

- 正規化運動エネルギー

$$E \equiv \frac{4T - 2cG^2}{(a+b-2c)G^2} = \sin^2 J(1 - Q \cos 2\ell)$$

$$Q \equiv \frac{a-b}{a+b-2c}$$

$$0 \leq Q \leq 1$$

$$Q_{\text{Earth}} = 3.334 \times 10^{-4}$$

$$Q_{\text{Moon}} = 0.226$$

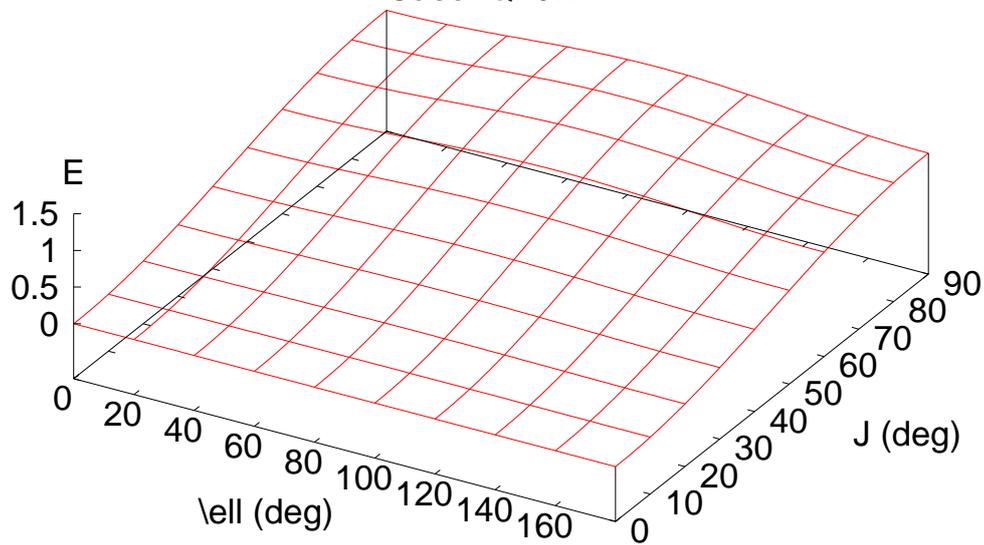
- 等エネルギー曲線 = 軌道図

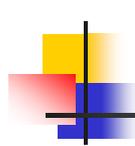
- E の値によって運動の様相が変化 $0 \leq E \leq 1+Q$
- 振動モード ($E > 1-Q$) vs 回転モード ($E < 1-Q$)
- $A \sim B \rightarrow Q \sim 0 \rightarrow$ 回転モードが主流



正規化エネルギー

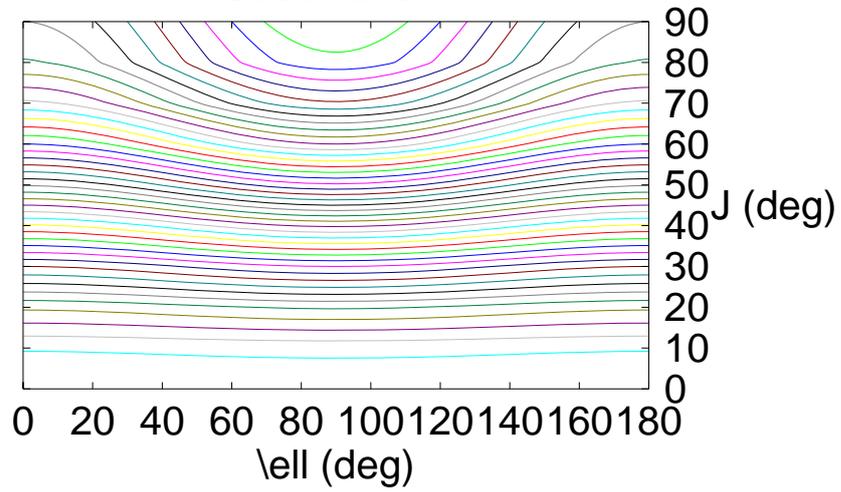
Case: $Q=0.1$





等エネルギー曲線

Case: $Q=0.1$



自由回転の解(3)

- $A < B < C$ のとき (厳密な扱い) $a > b > c$

- エネルギー積分 (問: 積分であることを示せ)

$$4T_0 \equiv 2G_0^2 d = (a+b)G_0^2 - (a+b-2c)L^2 - (a-b)(G_0^2 - L^2) \cos 2\ell$$

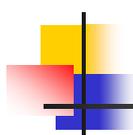
$$a \geq d \geq c$$

- ℓ を消去 (問: 導け)

$$\frac{dL}{dt} = \pm \sqrt{(a-c)(b-c)(L_0^2 - L^2)(L^2 - W_1)}$$

$$L_0 \equiv \sqrt{\frac{a-d}{a-c}} G_0 \leq G_0$$

$$W_1 \equiv \left(\frac{b-d}{b-c} \right) G_0^2 \leq L_0^2$$



解の分類

- 特性逆モーメント d の値に応じた**解の5分類**
 - 最高エネルギー: $d=a, k$ …A軸周りの永久回転
 - 高エネルギー: $d>b, k>1$ …別名:長(A)軸モード
 - 臨界エネルギー: $d=b, k=1$ …別名:漸近モード
 - 低エネルギー: $d<b, k<1$ …別名:短(C)軸モード
 - 最低エネルギー: $d=c, k=0$ …C軸周りの永久回転
- ケプラー運動との**類似と相違**
 - 主な類似点:離心率 $e \leftrightarrow$ 楕円関数の母数 k
 - 主な相違点:周期の長短($k=1$ のときだけ周期無限大)

低エネルギー: $d < b$

- L の変域と位相角への変数変換(天下りのだが)

$$L_1 \equiv \sqrt{W_1} \leq L \leq L_0 \quad L = L_0 \sqrt{1 - k_L^2 \sin^2 \varphi_L} \quad k_L^2 \equiv \frac{L_0^2 - L_1^2}{L_0^2} < 1$$

- 位相角の運動方程式・初期条件と解(問:導け)

$$\frac{d\varphi_L}{du_L} = \sqrt{1 - k_L^2 \sin^2 \varphi_L}, (\varphi_L = 0 \text{ at } u_L = 0) \rightarrow \varphi_L = \text{am}(u_L; k_L)$$

- 楕円関数の引数と母数

$$u_L \equiv G_0 \sqrt{(a-d)(b-c)}(t-t_0) \\ = L_0 \sqrt{(a-c)(b-c)}(t-t_0) \quad k_L = \sqrt{\frac{(a-b)(d-c)}{(a-d)(b-c)}}$$

低エネルギー(2)

■ 解の楕円関数表現

- 問: 既出(4.自由回転)の解と同じことを確かめよ

$$L = L_0 \operatorname{dn}(u_L; k_L) \quad n \equiv \frac{a-b}{b-c} \quad \begin{array}{l} n_{\text{Earth}} = 6.668 \times 10^{-4} \\ n_{\text{Moon}} = 0.584 \end{array}$$

$$\ell = \frac{\pi}{2} - \operatorname{am}(u_L; k_L) - \tan^{-1} \left[\frac{n \operatorname{sn}(u_L; k_L) \operatorname{cn}(u_L; k_L)}{1 + \sqrt{1+n} + n \operatorname{sn}^2(u_L; k_L)} \right]$$

$$g = g_0 + cG_0(t - t_0) + \frac{G_0 \sqrt{1+n}}{L_0} \operatorname{pn}(u_L; n, k_L)$$

低エネルギー(3)

- 解の振幅関数表現 $\varphi = \text{am}(u_L; k_L)$

- 問: 確かめよ

$$L = L_0 \sqrt{1 - k_L^2 \sin^2 \varphi}$$

$$\ell = \frac{\pi}{2} - \varphi - \tan^{-1} \left[\frac{n \sin \varphi \cos \varphi}{1 + \sqrt{1+n} + n \sin^2 \varphi} \right]$$

$$g = g_0 + cG_0(t - t_0) + \frac{G_0 \sqrt{1+n}}{L_0} \Pi(\varphi; n, k_L)$$

低エネルギー(4)

- $A=B$ のとき: $a=b, n=0, k=0$
 - 問: $\ell_0 = \pi/2$ とすれば既出解と一致することを示せ

$$L = L_0$$

$$\ell = \frac{\pi}{2} - u$$

$$u = (a - c)L_0(t - t_0)$$

$$g = g_0 + aG_0(t - t_0)$$

低エネルギー(5)

- 地球の場合 $n_{\text{Earth}} = 6.668 \times 10^{-4}, k_{\text{Earth}} \sim 3 \times 10^{-8}$

- 注意: n は無視できないが k^2 は無視できる

$$L \cong L_0$$

$$\ell \cong \frac{\pi}{2} - u - \tan^{-1} \left[\frac{n \sin u \cos u}{1 + \sqrt{1 + n + n \sin^2 u}} \right]$$

$$g \cong g_0 + cG_0(t - t_0) + \frac{G_0}{L_0} \tan^{-1} \left(\sqrt{1 + n} \tan u \right)$$

臨界エネルギー: $d=b$

- L の変域と変数変換

$$0 \leq L \leq L_0$$

$$L = \frac{L_0}{\cosh \varphi_C}$$

- 変換後の運動方程式(問:導け)と自明解

$$\frac{d\varphi_C}{du_C} = 1 \rightarrow \varphi_C = u_C$$

- 双曲線関数の引数

$$u_C \equiv G_0 \sqrt{(a-b)(b-c)}(t-t_0)$$

臨界エネルギー(2)

- 解の双曲線関数表現

- 問: 低エネルギー解で $k=1$ の極限として求めよ

$$L = \frac{L_0}{\cosh u_c}$$

$$\ell = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \left[\frac{\sinh u_c}{\sigma} \right]$$

$$g = g_0 + cG_0(t - t_0) + \frac{a - c}{\sqrt{(a - b)(b - c)}} \Pi_x(\sinh u_c; n, 1)$$

高エネルギー: $d > b$

- Lの変域と変数変換

$$-L_0 \leq L \leq L_0$$

$$L = L_0 \cos \varphi_H$$

$$k_H \equiv \frac{1}{k_L} < 1$$

- 位相角の運動方程式と解(問:導け)

$$\frac{d\varphi_H}{du_H} = \sqrt{1 - k_H^2 \sin^2 \varphi_H} \rightarrow \varphi_H = \text{am}(u_H; k_H)$$

$$u_H \equiv \frac{k_L u_L}{k_H}$$

- 楕円関数の引数と母数

$$u_H \equiv G_0 \sqrt{(a-b)(d-c)(t-t_0)}$$

$$k_H = \sqrt{\frac{(a-d)(b-c)}{(a-b)(d-c)}}$$

高エネルギー(2)

- 解の楕円関数表現

- 問: 低エネルギー解の楕円関数表現から母数の**逆数変換**で求めよ

$$k_H \equiv \frac{1}{k_L} < 1$$

$$L = L_0 \operatorname{cn}(u_H; k_H)$$

$$\ell = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \left[\frac{k_H \sqrt{1 + n \operatorname{sn}(u_H; k_H)}}{\operatorname{dn}(u_H; k_H)} \right]$$

$$g = g_0 + c G_0 (t - t_0) + \frac{a - c}{\sqrt{(a - b)(d - c)}} \operatorname{pn}(u_H; k_H^2 n, k_H)$$

■ アンドワイエ角 (h, I, g, J, ℓ)

- 慣性座標系から角運動量軸を経由して慣性主軸座標系を規定する5つの角度
- 慣性主軸座標系の基底行列表現

$$(\mathbf{e}_A \quad \mathbf{e}_B \quad \mathbf{e}_C)^T = \mathbf{R}_3(\ell) \mathbf{R}_1(J) \mathbf{R}_3(g) \mathbf{R}_1(I) \mathbf{R}_3(h)$$

- 一般化運動量との関係

$$p_\phi = G \cos J, \quad p_\psi = G \cos I$$

$$p_\theta = G \sin J \sin(\phi - \ell) = G \sin I \sin(\psi - h)$$

■ アンドワイエ角(2)

- 基底行列の慣性系成分表現(問:確かめよ)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}_A &= \begin{pmatrix} C_\ell C_g C_h - C_\ell S_g C_I S_h + S_\ell S_J S_I S_h - S_\ell C_J S_g C_h - S_\ell C_J C_g C_I S_h \\ C_\ell C_g S_h + C_\ell S_g C_I C_h - S_\ell S_J S_I C_h - S_\ell C_J S_g S_h + S_\ell C_J C_g C_I C_h \\ C_\ell S_g S_I + S_\ell S_J C_I + S_\ell C_J C_g S_I \end{pmatrix} \\
 \mathbf{e}_B &= \begin{pmatrix} -S_\ell C_g C_h + S_\ell S_g C_I S_h + C_\ell S_J S_I S_h - C_\ell C_J S_g C_h - C_\ell C_J C_g C_I S_h \\ -S_\ell C_g S_h - S_\ell S_g C_I C_h - C_\ell S_J S_I C_h - C_\ell C_J S_g S_h + C_\ell C_J C_g C_I C_h \\ -S_\ell S_g S_I + C_\ell S_J C_I + C_\ell C_J C_g S_I \end{pmatrix} \\
 \mathbf{e}_C &= \begin{pmatrix} C_J S_I S_h + S_J S_g C_h + S_J C_g C_I S_h \\ -C_J S_I C_h + S_J S_g S_h - S_J C_g C_I C_h \\ C_J C_I - S_J C_g S_I \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

角運動量座標系

- (一般に) 角運動量軸をZ軸とする座標系 $\mathbf{e}_G \equiv \frac{\mathbf{L}}{G}$
- (特に) アンドワイエ角に伴随する角運動量座標系

$$(\mathbf{e}_E \quad \mathbf{e}_F \quad \mathbf{e}_G)^T = \mathbf{R}_1(I) \mathbf{R}_3(h)$$

- アンドワイエ角運動量座標系での基底表現

$$\mathbf{e}_X = \begin{pmatrix} C_h \\ -S_h C_I \\ S_h S_I \end{pmatrix}, \mathbf{e}_Y = \begin{pmatrix} S_h \\ C_h C_I \\ -C_h S_I \end{pmatrix}, \mathbf{e}_Z = \begin{pmatrix} 0 \\ S_I \\ C_I \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}_A = \begin{pmatrix} C_I C_g - S_I C_J S_g \\ C_I S_g + S_I C_J C_g \\ S_I S_J \end{pmatrix}, \mathbf{e}_B = \begin{pmatrix} -S_I C_g - C_I C_J S_g \\ -S_I S_g + C_I C_J C_g \\ C_I S_J \end{pmatrix}, \mathbf{e}_C = \begin{pmatrix} S_J S_g \\ -S_J C_g \\ C_J \end{pmatrix}$$

■ アンドワイエ角(3)

- 角速度ベクトルの表現

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{dh}{dt} \mathbf{e}_h + \frac{dI}{dt} \mathbf{e}_I + \frac{dg}{dt} \mathbf{e}_g + \frac{dJ}{dt} \mathbf{e}_J + \frac{d\ell}{dt} \mathbf{e}_\ell$$

- 回転軸ベクトルの角運動量座標系成分表現

$$\mathbf{e}_h = \mathbf{e}_Z = \mathbf{e}_F \sin h + \mathbf{e}_G \cos h$$

$$\mathbf{e}_I = \mathbf{e}_E, \mathbf{e}_g = \mathbf{e}_G, \mathbf{e}_J = \mathbf{e}_E \cos g + \mathbf{e}_F \sin g$$

$$\mathbf{e}_\ell = \mathbf{e}_C = (\mathbf{e}_E \sin g - \mathbf{e}_F \cos g) \sin J + \mathbf{e}_G \cos J$$

角運動量

- 2通りの角運動量ベクトルの成分表現

$$\begin{pmatrix} L_X \\ L_Y \\ L_Z \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} \sin I \sin h \\ -\sin I \cos h \\ \cos I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{G^2 - H^2} \sin h \\ -\sqrt{G^2 - H^2} \cos h \\ H \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} L_A \\ L_B \\ L_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\omega_A \\ B\omega_B \\ C\omega_C \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} \sin J \sin \ell \\ \sin J \cos \ell \\ \cos J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{G^2 - L^2} \sin \ell \\ \sqrt{G^2 - L^2} \cos \ell \\ L \end{pmatrix}$$

■ アンドワイエ変数

- 角運動量の絶対値と5つのアンドワイエ角

$$(G, h, I, g, J, \ell)$$

- 非正準だが幾何学的意味は明らか
 - 小変動成分(=自由回転では定数) G, h, I
 - 大変動成分(=自由回転でも変化) g, J, ℓ

■ アンドワイエ変数(2)

■ 小変動成分の運動方程式

- 問: セレ正準変数の運動方程式より導け

$$\frac{dG}{dt} = \left(\frac{\partial V}{\partial g} \right)_{G,h,I,J,\ell}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{1}{G \sin I} \left(\frac{\partial V}{\partial I} \right)_{G,h,g,J,\ell}$$

$$\frac{dI}{dt} = \frac{1}{G \sin I} \left[\cos I \left(\frac{dG}{dt} \right) - \left(\frac{\partial V}{\partial h} \right)_{G,I,g,J,\ell} \right]$$

■ アンドワイエ変数(3)

■ 大変動成分の運動方程式(問:導け)

$$\frac{dg}{dt} = G \left[\left(\frac{a+b}{2} \right) - \left(\frac{a-b}{2} \right) \cos 2\ell \right] - \left(\frac{\partial V}{\partial G} \right)_{L,H,\ell,g,h}$$
$$- \frac{1}{G} \left[\cot I \left(\frac{\partial V}{\partial I} \right)_{G,h,g,J,\ell} + \cot J \left(\frac{\partial V}{\partial J} \right)_{G,h,I,g,\ell} \right]$$

$$\frac{dJ}{dt} = \left(\frac{a-b}{2} \right) G \sin J \sin 2\ell + \frac{1}{G \sin J} \left[\cos J \left(\frac{dG}{dt} \right) - \left(\frac{\partial V}{\partial \ell} \right)_{G,h,I,g,J} \right]$$

$$\frac{d\ell}{dt} = -G \cos J \left[\left(\frac{a+b}{2} - c \right) - \left(\frac{a-b}{2} \right) \cos 2\ell \right] + \frac{1}{G \sin J} \left(\frac{\partial V}{\partial J} \right)_{G,h,I,g,\ell}$$

自由回転要素

- 要素 = 運動の6積分定数
- Fukushima and Ishizaki (1994a, CMDA)
 - Jが最大値となる時のアンドワイエ変数の値

$$(G_0, h_0, I_0, g_0, J_0, t_0) \leftrightarrow (L_0, G_0, H_0, g_0, h_0, t_0)$$

- 諸定数 $2T = aG_0^2 - (a-c)L_0^2 = G_0^2 (a \sin^2 J_0 + c \cos^2 J_0)$

$$d = a \sin^2 J_0 + c \cos^2 J_0$$

$$k = \sqrt{n} \tan J_0$$

$$n = \frac{a-b}{a-c}$$

要素による解表現

- 低エネルギーの場合(問:導け)

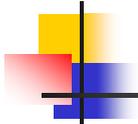
- 注意: a, b, c, n, σ は要素によらない定数

$$G = G_0, h = h_0, I = I_0 \quad u \equiv G_0 \cos J_0 \sqrt{(a-c)(b-c)}(t-t_0)$$

$$g = g_0 + cG_0(t-t_0) + \frac{1}{\sigma \cos J_0} \operatorname{pn}(u; n, k) \quad \sigma = \frac{1}{\sqrt{1+n}}$$

$$J = \sin^{-1} \left[\sin J_0 \sqrt{1 + n \operatorname{sn}^2(u; k)} \right] \quad k = \sqrt{n} \tan J_0 \quad n = \frac{a-b}{a-c}$$

$$\ell = \frac{\pi}{2} - \operatorname{am}(u; k) - \tan^{-1} \left[\frac{(1-\sigma) \operatorname{sn}(u; k) \operatorname{cn}(u; k)}{\sigma + (1-\sigma) \operatorname{sn}^2(u; k)} \right]$$



軌道 vs 回転(2)

項目	軌道運動	回転運動
基本解	ケプラー運動	自由回転
解の分類	楕円、双曲線	短軸回転、長軸回転
分類の鍵	軌道離心率 e	楕円関数の母数 k
特殊関数	ケプラー方程式の解	楕円関数、楕円積分
基本角	離心近点角 E	振幅関数 $\text{am}(u;k)$
正準変数	ドゥローネ正準変数	セレ正準変数
要素	ケプラー軌道要素	自由回転要素

Vの偏微分

- セレ正準変数では複雑 (Tを簡易化した代償)

$$V = V(L, G, H, \ell, g, h) = V(G, h, I(G, H), g, J(G, L), \ell)$$

- 作用変数によるVの偏微分

$$\left(\frac{\partial V}{\partial L}\right)_{G, H, \ell, g, h} = \left(\frac{\partial J}{\partial L}\right)_G \left(\frac{\partial V}{\partial J}\right)_{G, h, I, g, \ell} \quad \left(\frac{\partial V}{\partial H}\right)_{L, G, \ell, g, h} = \left(\frac{\partial I}{\partial H}\right)_G \left(\frac{\partial V}{\partial I}\right)_{G, h, g, J, \ell}$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial G}\right)_{L, H, \ell, g, h} = \left(\frac{\partial V}{\partial G}\right)_{h, I, g, J, \ell} + \left(\frac{\partial J}{\partial G}\right)_L \left(\frac{\partial V}{\partial J}\right)_{G, h, I, g, \ell} + \left(\frac{\partial I}{\partial G}\right)_H \left(\frac{\partial V}{\partial I}\right)_{G, h, g, J, \ell}$$

- アンドワイエ角の偏微分

$$\left(\frac{\partial J}{\partial L}\right)_G = \frac{-1}{G \sin J}, \left(\frac{\partial J}{\partial G}\right)_L = \frac{\cos J}{G \sin J} \quad \left(\frac{\partial I}{\partial H}\right)_G = \frac{-1}{G \sin I}, \left(\frac{\partial I}{\partial G}\right)_H = \frac{\cos I}{G \sin I}$$

角度偏微分とトルク(2)

- アンドワイエ角偏微分とオイラー角偏微分

$$\left(\frac{\partial V}{\partial J}\right)_{\ell,g,I,h} = \left(\frac{\partial i}{\partial J}\right)_{g,I} \left(\frac{\partial V}{\partial \psi}\right)_{\theta,\phi} + \left(\frac{\partial \theta}{\partial J}\right)_{g,I} \left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)_{\psi,\phi} + \left(\frac{\partial j}{\partial J}\right)_{g,I} \left(\frac{\partial V}{\partial \phi}\right)_{\psi,\theta}$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial I}\right)_{\ell,J,g,h} = \left(\frac{\partial i}{\partial I}\right)_{J,g} \left(\frac{\partial V}{\partial \psi}\right)_{\theta,\phi} + \left(\frac{\partial \theta}{\partial I}\right)_{J,g} \left(\frac{\partial V}{\partial \theta}\right)_{\psi,\phi} + \left(\frac{\partial j}{\partial I}\right)_{J,g} \left(\frac{\partial V}{\partial \phi}\right)_{\psi,\theta}$$

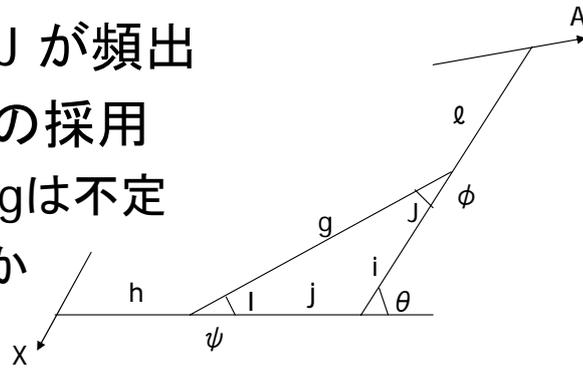
- アンドワイエ角Iによる他の補助角などの偏微分

$$\left(\frac{\partial i}{\partial I}\right)_{J,g} = \frac{-\sin i \cos i}{\tan I} \quad \left(\frac{\partial j}{\partial I}\right)_{J,g} = \frac{\sin g \cos^2 j}{\sin J \cos^2 I} \quad \left(\frac{\partial \theta}{\partial I}\right)_{J,g} = \frac{\sin \theta}{\sin I \sin J + \cos I \cos g \sin J}$$

- アンドワイエ角Jによる偏微分:対称置換*I,i*↔*J,j*で

微小角の困難

- セレ正準変数、アンドワイエ角共通の**困難**
- 分母に $\sin I$, $\sin J$ が頻出
- 原因: 3-1-3系列の採用
 - 例: $I \sim 0$ のとき h , g は不定
 - 関係図から明らか
- 処方箋
 - 1-2-3系列などの採用 + 適切な座標系の採用



球面直角三角形に 伴う正準変換

- Fukushima (1994, CMDA)

$$(X, Y; x, y) \rightarrow (U, V; u, v)$$

- 変数変換 (問: 正準変換であることを示せ)

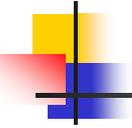
$$U = X$$

$$V = \sqrt{X^2 - Y^2} \sin y$$

$$u = x + \tan^{-1} \left(\frac{Y}{X} \tan y \right)$$

$$v = \tan^{-1} \left(\frac{\sqrt{X^2 - Y^2}}{Y} \cos y \right)$$

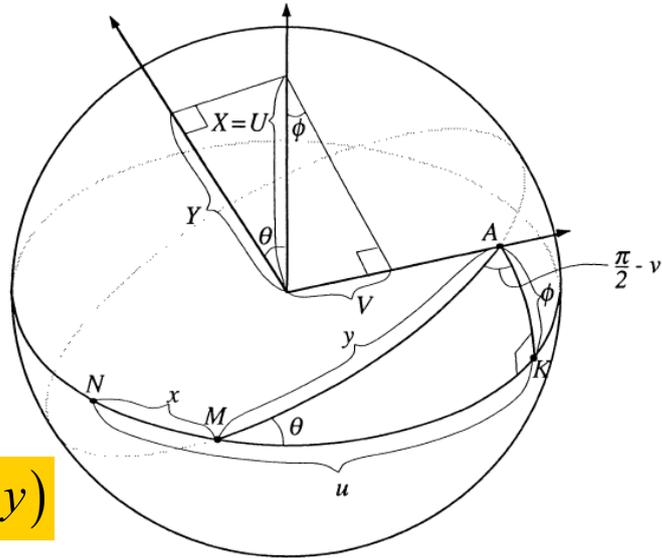
球面直角三角形に伴う正準変換(2)



■ 補助角の導入

$$\theta \equiv \sin^{-1} \left(\frac{Y}{X} \right)$$

$$\phi \equiv \sin^{-1} (\sin \theta \sin y)$$



球面直角三角形に 伴う正準変換(3)

- 角変数の行列関係式(問:図より導け)

$$\mathbf{R}_3(x)\mathbf{R}_1(\theta) = \mathbf{R}_1(u)\mathbf{R}_2(-\phi)\mathbf{R}_3(v)$$

- 角変数の変換公式(問:確かめよ)

$$u = \tan^{-1}(\tan \theta \cos y)$$

$$\tau_\theta \equiv \tan \frac{\theta}{2}$$

$$v = \tan^{-1}(\cos \theta \tan y) = y - \tan^{-1}\left(\frac{\tau_\theta^2 \sin 2y}{1 + \tau_\theta^2 \cos 2y}\right)$$

新しい正準変数

- 「球面直角三角形に伴う正準変換」を2回活用

$$(L, G, H; l, g, h) \rightarrow (X, F, W; x, f, w)$$

- 新しい作用変数: $X \equiv L_A, F \equiv G, W \equiv L_X$

- 新しい補助角: $u, z, f \equiv u + g + z$

- 運動エネルギーの新しい表現(問: 示せ)

$$2T = cF^2 + (a-c)X^2 + (b-c)(F^2 - X^2)\sin^2 x$$

- 角変数 x による平均化→楕円型

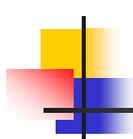
新しい作用変数

- 新しい作用変数のセレ正準変数による直接表現

$$X \equiv L_A = \sqrt{G^2 - L^2} \sin \ell = G \sin J \sin \ell$$

$$F \equiv G$$

$$W \equiv L_X = \sqrt{G^2 - H^2} \sin h = G \sin I \sin h$$



新しい補助角

- 新しい補助角 y, z, u, v の導入 (問: 示せ)

$$x = \tan^{-1}(\tan J \cos \ell)$$

$$w = \tan^{-1}(\tan I \cos h)$$

$$y = \sin^{-1}(\sin J \sin \ell)$$

$$v = \sin^{-1}(\sin I \sin h)$$

$$z = \tan^{-1}(\cos J \tan \ell)$$

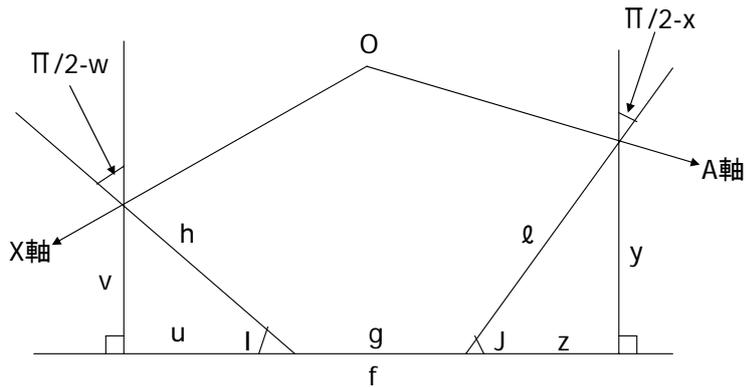
$$u = \tan^{-1}(\cos I \tan h)$$

$$f \equiv u + g + z$$

新しい角変数 (w, v, f, y, x)

- 基底行列表現 (y の符号に注意)

$$(\mathbf{e}_A \quad \mathbf{e}_B \quad \mathbf{e}_C)^T = \mathbf{R}_1(x) \mathbf{R}_2(-y) \mathbf{R}_3(f) \mathbf{R}_2(v) \mathbf{R}_1(w)$$



新しい角変数(2)

- 2通りの角運動量ベクトルの成分表現

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} \sin v \\ -\cos v \sin w \\ \cos v \cos w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} W \\ -\sqrt{F^2 - W^2} \sin w \\ \sqrt{F^2 - W^2} \cos w \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} L_A \\ L_B \\ L_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A\omega_A \\ B\omega_B \\ C\omega_C \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} \sin y \\ \cos y \sin x \\ \cos y \cos x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X \\ \sqrt{F^2 - X^2} \sin x \\ \sqrt{F^2 - X^2} \cos x \end{pmatrix}$$

角運動量座標系(2)

- 新しい角変数に伴う角運動量座標系 $\mathbf{e}_R \equiv \frac{\mathbf{L}}{F}$

$$(\mathbf{e}_P \quad \mathbf{e}_Q \quad \mathbf{e}_R)^T = \mathbf{R}_2(\nu) \mathbf{R}_1(w)$$

- 新しい角運動量座標系での基底表現

$$\mathbf{e}_X = \begin{pmatrix} C_v \\ 0 \\ S_v \end{pmatrix}, \mathbf{e}_Y = \begin{pmatrix} S_v S_w \\ C_w \\ -C_v S_w \end{pmatrix}, \mathbf{e}_Z = \begin{pmatrix} -S_v C_w \\ S_w \\ C_v C_w \end{pmatrix}$$
$$\mathbf{e}_A = \begin{pmatrix} C_y C_f \\ C_y S_f \\ S_f \end{pmatrix}, \mathbf{e}_B = \begin{pmatrix} -C_x S_f - S_x S_y C_f \\ C_x C_f - S_x S_y S_f \\ S_x C_y \end{pmatrix}, \mathbf{e}_C = \begin{pmatrix} S_x S_f - C_x S_y C_f \\ -S_x C_f - C_x S_y S_f \\ C_x C_y \end{pmatrix}$$

新しい角変数(3)

- 角速度ベクトルの表現(符号に注意)

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{dw}{dt} \mathbf{e}_w + \frac{dv}{dt} \mathbf{e}_v + \frac{df}{dt} \mathbf{e}_f - \frac{dy}{dt} \mathbf{e}_y + \frac{dx}{dt} \mathbf{e}_x$$

- 回転軸ベクトルの角運動量座標系成分表現

$$\mathbf{e}_w = \mathbf{e}_X = \mathbf{e}_P \cos \nu + \mathbf{e}_R \sin \nu$$

$$\mathbf{e}_v = \mathbf{e}_Q, \mathbf{e}_f = \mathbf{e}_R, \mathbf{e}_y = -\mathbf{e}_P \sin f + \mathbf{e}_Q \cos f$$

$$\mathbf{e}_x = \mathbf{e}_A = (\mathbf{e}_P \cos f + \mathbf{e}_Q \sin f) \cos y + \mathbf{e}_R \sin y$$

正準運動方程式(2)

- 新しい正準変数の場合

$$(X, F, W; x, f, w)$$

$\frac{dF}{dt} = \left(\frac{\partial V}{\partial f} \right)_{X, F, W, x, w}$	$\frac{dX}{dt} = -\left(\frac{b-c}{2} \right) (F^2 - X^2) \sin 2x + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_{X, F, W, f, w}$
$\frac{dW}{dt} = \left(\frac{\partial V}{\partial w} \right)_{X, F, W, x, f}$	$\frac{dx}{dt} = X \left[(a-c) - (b-c) \sin^2 x \right] - \left(\frac{\partial V}{\partial X} \right)_{F, W, x, f, w}$
$\frac{dw}{dt} = -\left(\frac{\partial V}{\partial W} \right)_{X, F, x, f, w}$	$\frac{df}{dt} = F \left[c + (b-c) \sin^2 x \right] - \left(\frac{\partial V}{\partial F} \right)_{X, W, x, f, w}$

新しい変数

- 角運動量の絶対値と
5つの新しい角変数 (F, w, v, f, y, x)
- 小変動成分 F, w, v の運動方程式

$$\frac{dF}{dt} = \left(\frac{\partial V}{\partial f} \right)_{X, F, W, x, w}, \quad \frac{dw}{dt} = - \left(\frac{\partial V}{\partial W} \right)_{X, F, x, f, w}$$
$$\frac{dv}{dt} = \left(\frac{\partial V}{\partial w} \right)_{X, F, W, x, f} - \left(\frac{\tan v}{F} \right) \left(\frac{dF}{dt} \right)$$

新しい変数(2)

■ 大変動成分 f, y, x の運動方程式

$$\frac{df}{dt} = F \left[\left(\frac{b+c}{2} \right) - \left(\frac{b-c}{2} \right) \cos 2x \right] - \left(\frac{\partial V}{\partial F} \right)_{X,W,x,f,w}$$

$$\frac{dy}{dt} = - \left(\frac{b-c}{2} \right) F \cos y \sin 2x + \frac{1}{F \cos y} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)_{X,F,W,f,w} - \sin y \left(\frac{dF}{dt} \right) \right]$$

$$\frac{dx}{dt} = F \left[\left(\frac{2a-b-c}{2} \right) + \left(\frac{b-c}{2} \right) \cos 2x \right] \sin y - \left(\frac{\partial V}{\partial X} \right)_{F,W,x,f,w}$$

自由回転の解(4)

- $V=0 \rightarrow$ 解の自明な部分 $F = F_0, W = W_0, w = w_0$
- 基本方程式

$$\frac{dX}{dt} = -\left(\frac{b-c}{2}\right)(F_0^2 - X^2)\sin 2x$$

$$\frac{dx}{dt} = X \left[\left(\frac{2a-b-c}{2}\right) + \left(\frac{b-c}{2}\right)\cos 2x \right]$$

$$\frac{df}{dt} = F_0 \left[\left(\frac{b+c}{2}\right) - \left(\frac{b-c}{2}\right)\cos 2x \right]$$

自由回転の解(5)

- $B=C$ の場合: 簡単

- X, F, W, w は一定

$$X = X_0, F = F_0, W = W_0, w = w_0$$

- x と f は時間の線形関数

$$x = x_0 + n_x(t - t_0), f = f_0 + n_f(t - t_0)$$

- x の動きは遅く、 f の動きは速い

$$n_x = (a - c)X_0 > 0, n_f = cF_0 > 0$$

自由回転の解(6)

- $A=B<C$ のとき三角関数で表現可能

- エネルギー積分

$$2T_0 \equiv F_0^2 d = aX^2 + (a \sin^2 x + c \cos^2 x)(F_0^2 - X^2)$$

- x を消去(符号に注意)

$$\frac{dX}{dt} = -F_0 \sqrt{(a-d)(a-c)(X_0^2 - X^2)} \quad X_0 \equiv F_0 \sqrt{\frac{d-c}{a-c}}$$

- X の解(問: x と t の解を求めよ)

$$X = X_0 \cos \varphi \quad \varphi \equiv F_0 \sqrt{(a-d)(d-c)}(t-t_0)$$

自由回転の軌道図(2)

- 自由回転 → $F = \text{一定}$ → 再び自由度2

- 新しい正規化運動エネルギー

$$K \equiv \frac{4T - 2aF^2}{(2a - b - c)F^2} = -\cos^2 y (1 + P \cos 2x)$$

$$P \equiv \frac{b - c}{2a - b - c}$$

$$0 \leq P \leq 1$$

- 新しい等エネルギー曲線

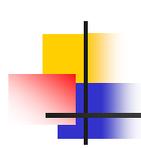
$$-(1 + P) \leq K \leq 0$$

- 振動モード ($K > -1 + P$) vs 回転モード ($K < -1 + P$)

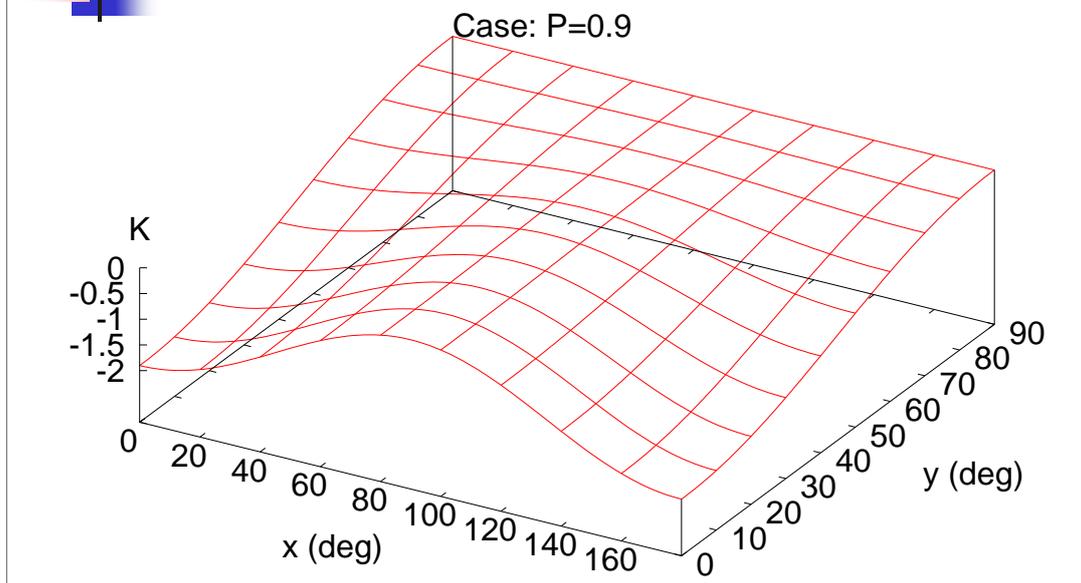
- $A \sim B \rightarrow P \sim 1 \rightarrow$ 振動モードが主流

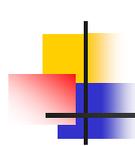
$$1 - P_{\text{Earth}} = 1.337 \times 10^{-3}$$

$$P_{\text{Moon}} = 0.539$$



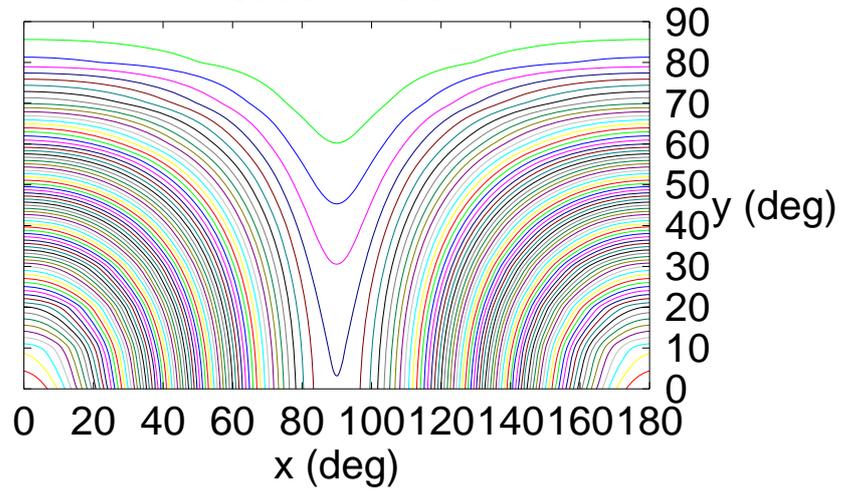
正規化エネルギー(2)





等エネルギー曲線(2)

Case: P=0.9



自由回転の解(7)

- $B < C$ のとき: 微小振動する近似解が存在
 - X や x の高次項を無視(後で近似解から正当化)

$$\frac{dX}{dt} = -(b-c)F_0^2 x, \quad \frac{dx}{dt} = (a-c)X, \quad \frac{df}{dt} = cF_0$$

- 近似解: X と x は遅い単振動、 f は速い線形運動

$$X = X_0 \cos n_X t - X_1 \sin n_X t, \quad x = x_0 \cos n_X t + x_1 \sin n_X t, \quad f = f_0 + n_f t$$

$$X_1 \equiv \frac{(b-c)F_0^2 x_0}{n_X}, \quad x_1 \equiv \frac{(a-c)X_0}{n_X}, \quad n_X = F_0 \sqrt{(a-c)(b-c)}, \quad n_f = cF_0$$

自由回転の解(8)

- $A < B < C$ のとき
 - エネルギー積分

$$2T_0 \equiv F_0^2 d = aX^2 + (b \sin^2 x + c \cos^2 x)(F_0^2 - X^2)$$

- x を消去

$$\frac{dX}{dt} = -\sqrt{(a-b)(a-c)(X_0^2 - X^2)(X^2 + S_1)}$$

$$X_0 \equiv F_0 \sqrt{\frac{d-c}{a-c}}$$

$$S_1 \equiv \left(\frac{b-d}{a-b} \right) F_0^2$$

自由回転の解(9)

- 低エネルギー($d < b$)の場合の厳密解 $\frac{k_L^2}{n} = \frac{d-c}{a-d}$
 - Fukushima (1994, CMDA)

$$X = X_0 \operatorname{cn}(u_L; k_L) \quad x = \tan^{-1} \left[\left(\frac{k_L}{\sqrt{n}} \right) \frac{\sqrt{1 + n \operatorname{sn}(u_L; k_L)}}{\operatorname{dn}(u_L; k_L)} \right]$$

$$f = f_0 + aG_0(t - t_0) + \frac{a-c}{\sqrt{(a-d)(b-c)}} \operatorname{pn} \left(u_L; \frac{k_L^2}{n}, k_L \right)$$

- 問: 他の場合の解を求めよ

8. 回転運動の数値積分

- さまざまな積分変数の取り方
 - オイラー記法: オイラー角と角速度 $\psi, \theta, \phi, \omega_A, \omega_B, \omega_C$
 - ラグランジュ記法: オイラー角と時間微分 $\psi, \theta, \phi, \dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi}$
 - 角運動量記法: オイラー角と角運動量 $\psi, \theta, \phi, L_A, L_B, L_C$
 - アンドワイエ記法: アンドワイエ変数 G, h, I, g, J, ℓ
 - 慣性系記法: オイラー角と角運動量 $\psi, \theta, \phi, L_X, L_Y, L_Z$
 - 接触要素記法: G, h, I, τ, u, s
- 微小角の困難 $\theta \sim 0$ $I \sim 0$ $J \sim 0$
- エンケの方法と高速回転の困難

オイラー記法

- 変数 $(\psi, \theta, \phi, \omega_A, \omega_B, \omega_C)$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{\omega_A \sin \phi + \omega_B \cos \phi}{\sin \theta}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_A \cos \phi - \omega_B \sin \phi$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \omega_C - \left(\frac{d\psi}{dt} \right) \cos \theta$$

$$\frac{d\omega_A}{dt} = W_A$$

$$\frac{d\omega_B}{dt} = W_B$$

$$\frac{d\omega_C}{dt} = W_C$$

$$W_A \equiv aN_A - \alpha\omega_B\omega_C, W_B \equiv bN_B - \beta\omega_C\omega_A, W_C \equiv cN_C - \gamma\omega_A\omega_B$$

ラグランジュ記法

- 変数 $(\psi, \theta, \phi, \dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi})$
- 運動方程式(問:確かめよ)

$$\frac{d^2\psi}{dt^2} = \frac{1}{\sin\theta} \left[W_A \sin\phi + W_B \cos\phi + \left(\frac{d\theta}{dt} \right) \left\{ \left(\frac{d\phi}{dt} \right) - \left(\frac{d\psi}{dt} \right) \cos\theta \right\} \right]$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = W_A \cos\phi - W_B \sin\phi - \left(\frac{d\phi}{dt} \right) \left[\left(\frac{d\psi}{dt} \right) \sin\theta \right]$$

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} = W_C - \left(\frac{d^2\psi}{dt^2} \right) \cos\theta + \left(\frac{d\theta}{dt} \right) \left[\left(\frac{d\psi}{dt} \right) \sin\theta \right]$$

角運動量記法

■ 変数 $(\psi, \theta, \phi, L_A, L_B, L_C)$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{aL_A \sin \phi + bL_B \cos \phi}{\sin \theta}$$

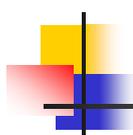
$$\frac{d\theta}{dt} = aL_A \cos \phi - bL_B \sin \phi$$

$$\frac{d\phi}{dt} = cL_C - \left(\frac{d\psi}{dt} \right) \cos \theta$$

$$\frac{dL_A}{dt} = N_A - (b - c)L_C L_B$$

$$\frac{dL_B}{dt} = N_B - (c - a)L_A L_C$$

$$\frac{dL_C}{dt} = N_C - (a - b)L_B L_A$$



既存記法の欠点

- 自由回転(もしくは $A=B$)のとき
 - 現実: 複雑度が2(もしくは4)
 - 複雑度 = 同時に解かなければならない常微分方程式の数
 - オイラー記法、角運動量記法: 複雑度が6(もしくは5)
 - ラグランジュ記法: 複雑度が常に6
- **アンドワイエ記法**: アンドワイエ変数
 - 自由回転のとき複雑度2、 $A=B$ のとき複雑度6
- **慣性系記法**: 角運動量ベクトル+オイラー角
 - 自由回転のとき複雑度3、 $A=B$ のとき複雑度4

アンドワイエ記法

■ アンドワイエ変数 (G, h, I, g, J, ℓ)

■ 角運動量座標系 $(\mathbf{e}_E, \mathbf{e}_F, \mathbf{e}_G)$

■ G, h, I : トルクを陽に用いる $\mathbf{N} = N_A \mathbf{e}_A + N_B \mathbf{e}_B + N_C \mathbf{e}_C$

$$\frac{dG}{dt} = N_G, \quad \frac{dh}{dt} = \frac{N_E}{G \sin I}, \quad \frac{dI}{dt} = -\left(\frac{N_F}{G}\right) \quad N_E \equiv \mathbf{N} \cdot \mathbf{e}_E, \text{ etc.}$$

■ g, J, ℓ : 角速度表現を逆^に解く

$$\frac{dg}{dt} \mathbf{e}_G + \frac{dJ}{dt} \mathbf{e}_J + \frac{d\ell}{dt} \mathbf{e}_C = \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega} \quad \boldsymbol{\Omega} \equiv \frac{dh}{dt} \mathbf{e}_Z + \frac{dI}{dt} \mathbf{e}_E$$

アンドワイエ記法(2)

- 角運動量座標系の回転

$$\boldsymbol{\Omega} \equiv \frac{dh}{dt} \mathbf{e}_Z + \frac{dI}{dt} \mathbf{e}_E \quad \mathbf{e}_Z = \mathbf{e}_F \sin I + \mathbf{e}_G \cos I$$

- 座標系回転の角速度の諸成分

$$\Omega_E = -\left(\frac{N_F}{G}\right), \quad \Omega_F = \frac{N_E}{G}, \quad \Omega_G = \frac{N_E}{G} \cot I$$

$$\begin{aligned} \Omega_J &= \Omega_E \cos g + \Omega_F \sin g, & \Omega_M &= -\Omega_E \sin g + \Omega_F \cos g \\ \Omega_K &= \Omega_G \sin J + \Omega_M \cos J, & \Omega_C &= \Omega_G \cos J - \Omega_M \sin J \end{aligned}$$

アンドワイエ記法(3)

- 大変動成分 g, J, ℓ の運動方程式(問:導け)

$$\frac{dg}{dt} = G \left[\left(\frac{a+b}{2} \right) - \left(\frac{a-b}{2} \right) \cos 2\ell \right] - (\Omega_G + \Omega_M \cot J)$$

$$\frac{dJ}{dt} = \left(\frac{a-b}{2} \right) G \sin J \sin 2\ell - \left[\Omega_J - \left(\frac{N_G}{G} \right) \cot J \right]$$

$$\frac{d\ell}{dt} = -G \cos J \left[\left(\frac{a+b}{2} - c \right) - \left(\frac{a-b}{2} \right) \cos 2\ell \right] - \frac{\Omega_M}{\sin J}$$

慣性系記法

- 変数: オイラー角と角運動量ベクトル $(\psi, \theta, \phi, \mathbf{L})$

- 運動方程式(角運動量部分) $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N}$
 - 自由回転のとき自由度3に減少

- 準備: 中間座標系の導入

$$\mathbf{N} = N_A \mathbf{e}_A + N_B \mathbf{e}_B + N_C \mathbf{e}_C$$

$$(\mathbf{e}_S \quad \mathbf{e}_T \quad \mathbf{e}_C)^T = \mathbf{R}_1(\theta) \mathbf{R}_3(\psi)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_A &= \mathbf{e}_S \cos \phi + \mathbf{e}_T \sin \phi \\ \mathbf{e}_B &= -\mathbf{e}_S \sin \phi + \mathbf{e}_T \cos \phi \end{aligned}$$

$$\mathbf{e}_S = \begin{pmatrix} \cos \psi \\ \sin \psi \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}_T = \begin{pmatrix} -\cos \theta \sin \psi \\ \cos \theta \cos \psi \\ \sin \theta \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}_C = \begin{pmatrix} \sin \theta \sin \psi \\ -\sin \theta \cos \psi \\ \cos \theta \end{pmatrix}$$

慣性系記法(2)

- 運動方程式(オイラー角部分)(問:導け)

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{\sin \theta} \left[\left(\frac{a+b}{2} \right) L_T + \left(\frac{a-b}{2} \right) (L_S \sin 2\phi - L_T \cos 2\phi) \right]$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \left(\frac{a+b}{2} \right) L_S + \left(\frac{a-b}{2} \right) (L_S \cos 2\phi + L_T \sin 2\phi)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = cL_C - \left(\frac{d\psi}{dt} \right) \cos \theta$$

$$L_S = L_X \cos \psi + L_Y \sin \psi, L_T = -(L_X \sin \psi - L_Y \cos \psi) \cos \theta + L_Z \sin \theta$$

$$L_C = (L_X \sin \psi - L_Y \cos \psi) \sin \theta + L_Z \cos \theta$$

慣性系記法(3)

■ A=Bの場合

- 積分の存在 $N_C = 0 \rightarrow L_C = \text{const.}$

- 変数の節約

$$L_Z = \frac{L_C - (L_X \sin \psi - L_Y \cos \psi) \sin \theta}{\cos \theta}$$

- 注意1:トルクの計算に回転角は**不要**(問:なぜか)
- 注意2:角速度計算にも回転角は**不要**(問:確かめよ)
- 結論:複雑度(=本質的変数の数) $\rightarrow 4$ (ψ, θ, L_X, L_Y)

慣性系記法(4)

- A=Bの場合(2)

- 歳差角と傾斜角の運動方程式

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{aL_T}{\sin\theta}, \quad \frac{d\theta}{dt} = aL_S$$

- 回転角の積分は、後で独立に行える

$$\frac{d\phi}{dt} = cL_C - aL_T \cot\theta$$

慣性系記法(5)

- A=Bの場合(3)

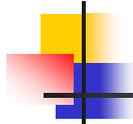
- 角運動量の運動方程式(問:導け)

$$\frac{dL_X}{dt} = N_S \cos \psi - N_T \cos \theta \sin \psi$$

$$\frac{dL_Y}{dt} = N_S \sin \psi + N_T \cos \theta \cos \psi$$

$$r_S = \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_S, \text{ etc.}$$

$$N_S = -(C - A) \sum \frac{3\mu}{r^5} r_C r_T, N_T = +(C - A) \sum \frac{3\mu}{r^5} r_C r_S$$



微小角の困難

- 3-1-3系列の宿命
- 見かけの困難($\theta \sim 0, I \sim 0$)の場合
 - 解決策＝大傾斜角となる座標系の導入
 - 例：地球回転での黄道座標系
- 真の困難($J \sim 0$) の場合
 - 運動の本質によるもの：座標系に非依存
 - 解決策＝別系列(1-2-3系列など)の導入

1-2-3系列の導入

■ 行列変換式

$$\mathbf{R}_3(\phi)\mathbf{R}_1(\theta)\mathbf{R}_3(\psi) \\ = \mathbf{R}_3(\zeta)\mathbf{R}_2(\eta)\mathbf{R}_1(\xi)$$

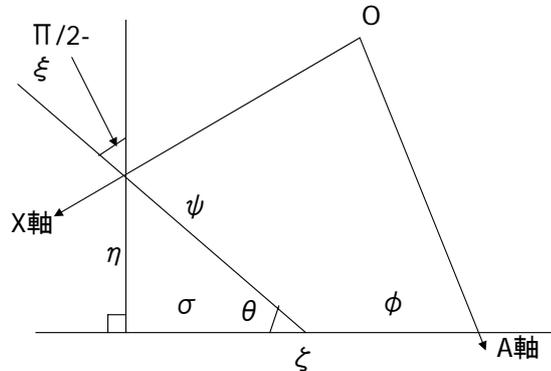
■ 角変数の変換式

$$\xi = \tan^{-1}(\tan \theta \cos \psi)$$

$$\eta = \sin^{-1}(\sin \theta \sin \psi)$$

$$\zeta = \phi + \sigma = \phi + \psi - \tan^{-1}\left(\frac{\tau_\theta^2 \sin 2\psi}{1 + \tau_\theta^2 \cos 2\psi}\right)$$

$$\tau_\theta = \tan \frac{\theta}{2}$$



1-2-3系列オイラー角

- 角速度ベクトルの表現 $\boldsymbol{\omega} = \frac{d\xi}{dt} \mathbf{e}_\xi + \frac{d\eta}{dt} \mathbf{e}_\eta + \frac{d\zeta}{dt} \mathbf{e}_\zeta$
- 回転軸ベクトルの表現

$$\mathbf{e}_\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \mathbf{e}_\eta = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \xi \\ \sin \xi \end{pmatrix}, \mathbf{e}_\zeta = \mathbf{e}_C = \begin{pmatrix} \sin \eta \\ -\cos \eta \sin \xi \\ \cos \eta \cos \xi \end{pmatrix}$$

- 慣性主軸方向の基底ベクトル

$$\mathbf{e}_A = \begin{pmatrix} \cos \zeta \cos \eta \\ \cos \zeta \sin \eta \sin \xi + \sin \zeta \cos \xi \\ -\cos \zeta \sin \eta \cos \xi + \sin \zeta \sin \xi \end{pmatrix}, \mathbf{e}_B = \begin{pmatrix} -\sin \zeta \cos \eta \\ -\sin \zeta \sin \eta \sin \xi + \cos \zeta \cos \xi \\ \sin \zeta \sin \eta \cos \xi + \cos \zeta \sin \xi \end{pmatrix}$$

角速度の表現(2)

- 慣性系の場合

- $\eta \sim 0$ でもOK

$$\omega_x = \dot{\xi} + \dot{\zeta} \sin \eta$$

$$\omega_y = \dot{\eta} \cos \xi - \dot{\zeta} \cos \eta \sin \xi$$

$$\omega_z = \dot{\eta} \sin \xi + \dot{\zeta} \cos \eta \cos \xi$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \omega_x - \left(\frac{d\zeta}{dt} \right) \sin \eta$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \omega_y \cos \xi + \omega_z \sin \xi$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{-\omega_y \sin \xi + \omega_z \cos \xi}{\cos \eta}$$

- 慣性系記法の運動方程式で角度部分を置き換えて使う

角速度の表現(3)

- 慣性主軸系の場合

- $\eta \sim 0$ でもOK

$$\omega_A = \dot{\xi} \cos \zeta \cos \eta + \dot{\eta} \sin \zeta$$

$$\omega_B = -\dot{\xi} \sin \zeta \cos \eta + \dot{\eta} \cos \zeta$$

$$\omega_C = \dot{\xi} \sin \eta + \dot{\zeta}$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\omega_A \cos \zeta - \omega_B \sin \zeta}{\cos \eta}$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \omega_A \sin \zeta + \omega_B \cos \zeta$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = \omega_C - \left(\frac{d\xi}{dt} \right) \sin \eta$$

- オイラーの運動方程式で角度部分を置き換えて使う

オイラー記法(2)

- 変数 $(\xi, \eta, \zeta, \omega_A, \omega_B, \omega_C)$
- 運動方程式

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\omega_A \cos \zeta - \omega_B \sin \zeta}{\cos \eta}$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \omega_A \sin \zeta + \omega_B \cos \zeta$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = \omega_C - \left(\frac{d\xi}{dt} \right) \sin \eta$$

$$\frac{d\omega_A}{dt} = W_A$$

$$\frac{d\omega_B}{dt} = W_B$$

$$\frac{d\omega_C}{dt} = W_C$$

ラグランジュ記法(2)

- 変数 $(\xi, \eta, \zeta, \dot{\xi}, \dot{\eta}, \dot{\zeta})$
- 運動方程式(問:確かめよ)

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{1}{\cos\eta} \left[W_A \cos\zeta - W_B \sin\zeta - \left(\frac{d\eta}{dt}\right) \left\{ \left(\frac{d\zeta}{dt}\right) - \left(\frac{d\xi}{dt}\right) \sin\eta \right\} \right]$$

$$\frac{d^2\eta}{dt^2} = W_A \sin\zeta + W_B \cos\zeta + \left(\frac{d\zeta}{dt}\right) \left[\left(\frac{d\xi}{dt}\right) \cos\eta \right]$$

$$\frac{d^2\zeta}{dt^2} = W_C - \left(\frac{d^2\xi}{dt^2}\right) \sin\eta - \left(\frac{d\eta}{dt}\right) \left[\left(\frac{d\xi}{dt}\right) \cos\eta \right]$$

角運動量記法(2)

■ 変数 $(\xi, \eta, \zeta, L_A, L_B, L_C)$

■ 運動方程式

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{aL_A \cos \zeta - bL_B \sin \zeta}{\cos \eta}$$

$$\frac{d\eta}{dt} = aL_A \sin \zeta + bL_B \cos \zeta$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = cL_C - \left(\frac{d\xi}{dt} \right) \sin \eta$$

$$\frac{dL_A}{dt} = N_A - (b-c)L_C L_B$$

$$\frac{dL_B}{dt} = N_B - (c-a)L_A L_C$$

$$\frac{dL_C}{dt} = N_C - (a-b)L_B L_A$$

■ アンドワイエ記法(4)

■ アンドワイエ流の新変数 (F, w, v, f, y, x)

■ 新しい角運動量座標系 $(\mathbf{e}_P, \mathbf{e}_Q, \mathbf{e}_R)$ $\mathbf{e}_R \equiv \mathbf{e}_G$

■ F, w, v : トルクを陽に用いる $\mathbf{N} = N_A \mathbf{e}_A + N_B \mathbf{e}_B + N_C \mathbf{e}_C$

$$\frac{dF}{dt} = N_R, \quad \frac{dw}{dt} = \frac{-N_Q}{F \cos v}, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{N_P}{F} \quad N_P \equiv \mathbf{N} \cdot \mathbf{e}_P, \text{ etc.}$$

■ f, y, x : 角速度表現を逆に解く

$$\frac{df}{dt} \mathbf{e}_R - \frac{dy}{dt} \mathbf{e}_y + \frac{dx}{dt} \mathbf{e}_A = \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega}' \quad \boldsymbol{\Omega}' \equiv \frac{dw}{dt} \mathbf{e}_X + \frac{dv}{dt} \mathbf{e}_v$$

■ アンドワイエ記法(5)

- 新しい角運動量座標系の回転

$$\boldsymbol{\Omega}' \equiv \frac{dw}{dt} \mathbf{e}_X + \frac{dv}{dt} \mathbf{e}_Q$$

$$\mathbf{e}_X = \mathbf{e}_P \cos v + \mathbf{e}_R \sin v$$

- 座標系回転の角速度の諸成分

$$\Omega'_P = -\left(\frac{N_Q}{F}\right), \quad \Omega'_Q = \frac{N_P}{F}, \quad \Omega'_R = -\left(\frac{N_Q}{F}\right) \tan v$$

アンドワイエ記法(6)

- 大変動成分 f, y, x の運動方程式 (問: 導け)

$$\frac{df}{dt} = [c + (b - c) \sin^2 x] F + \left(\frac{N_Q}{F} \right) \tan v$$

$$\frac{dy}{dt} = -(b - c) F \cos y \sin x \cos x + \frac{1}{F} (N_P \cos f + N_Q \sin f)$$

$$\frac{dx}{dt} = [(a - c) - (b - c) \sin^2 x] F \sin y$$

$$+ \frac{1}{F} [(N_Q \cos f - N_P \sin f) \cos y + N_Q \tan v \sin y]$$

慣性系記法(6)

- $A < B$: 新しい角変数と角運動量 $(\xi, \eta, \zeta, \mathbf{L})$
- 運動方程式(角運動量部分) $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N}$
- 別の中間座標系の導入

$$(\mathbf{e}_D \ \mathbf{e}_E \ \mathbf{e}_C)^T = \mathbf{R}_2(\eta)\mathbf{R}_1(\xi)$$

$$\mathbf{e}_D = \begin{pmatrix} \cos \eta \\ \sin \eta \sin \xi \\ -\sin \eta \cos \xi \end{pmatrix}, \mathbf{e}_E = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \xi \\ \sin \xi \end{pmatrix}, \mathbf{e}_C = \begin{pmatrix} \sin \eta \\ -\cos \eta \sin \xi \\ \cos \eta \cos \xi \end{pmatrix}$$

慣性系記法(7)

- 運動方程式(角変数の部分)(問:導け)

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{1}{\cos\eta} \left[\left(\frac{a+b}{2} \right) L_D + \left(\frac{a-b}{2} \right) (L_D \cos 2\xi + L_E \sin 2\xi) \right]$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \left(\frac{a+b}{2} \right) L_E + \left(\frac{a-b}{2} \right) (L_D \sin 2\xi - L_E \cos 2\xi)$$

$$\frac{d\xi}{dt} = cL_C - \left(\frac{d\xi}{dt} \right) \sin\eta$$

$$L_D = L_X \cos\eta + (L_Y \sin\xi - L_Z \cos\xi) \sin\eta, L_E = L_Y \cos\xi + L_Z \sin\xi$$

$$L_C = L_X \sin\eta - (L_Y \sin\xi - L_Z \cos\xi) \cos\eta$$

慣性系記法(8)

■ A=Bの場合

- 積分の存在 $N_C = 0 \rightarrow L_C = \text{const.}$

- 変数の削減

$$L_Z = \frac{L_C - L_X \sin \eta + L_Y \sin \xi \cos \eta}{\cos \xi \cos \eta}$$

- 結局、複雑度=4

$$(\xi, \eta, L_X, L_Y)$$

慣性系記法(9)

■ A=Bの場合(2)

■ 歳差角と傾斜角の運動方程式

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{aL_D}{\cos \eta}$$

$$L_D \equiv \frac{L_X}{\cos \eta} - L_C \tan \eta$$

$$\frac{d\eta}{dt} = aL_E$$

$$L_E \equiv \frac{L_Y}{\cos \xi} + \left(\frac{L_C}{\cos \eta} - L_X \tan \eta \right) \tan \xi$$

■ 回転角の積分 $\frac{d\zeta}{dt} = cL_C - aL_D \tan \eta$

慣性系記法(10)

- A=Bの場合(3)
 - 角運動量の運動方程式(問:導け)

$$\frac{dL_X}{dt} = N_D \cos \eta$$

$$\frac{dL_Y}{dt} = N_D \sin \xi \sin \eta + N_E \cos \xi$$

$$r_D = \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}_D, \text{ etc.}$$

$$N_D = -(C - A) \sum \frac{3\mu}{r^5} r_C r_E, N_E = +(C - A) \sum \frac{3\mu}{r^5} r_C r_D$$

回転の接触準要素

- 準要素 = 非摂動時に定数 or 時間の線形関数
- 接触(osculating)要素 = 状態変数を解析的に表現でき、非摂動時に(準)要素に帰着する変数
 - 摂動がある時は時間の非線形関数
- 接触準要素の例
 - $G, h, I + \tan J$ の最大値 + 楕円関数の引数 + g の線形部分

$$\left(G, h, I, \tau \equiv \tan J_0 = \frac{k}{\sqrt{n}}, u, s \right)$$

接触準要素→変数

- アンドワイエ変数の表現(問:確かめよ)

$$g = s + \sqrt{(1+n)(1+\tau^2)} \operatorname{pn}(u; n | m)$$

$$J = \tan^{-1} \left[\frac{\tau \operatorname{qn}(u; n | m)}{\operatorname{dn}(u | m)} \right]$$

$$\ell = \frac{\pi}{2} - \operatorname{am}(u | m) + \tan^{-1} \left[\frac{n \operatorname{sn}(u | m) \operatorname{cn}(u | m)}{\sqrt{1+n} (1 + \sqrt{1+n}) (1 - n \operatorname{sn}^2(u | m))} \right]$$

$$n \equiv \frac{a-b}{b-c}$$

$$m \equiv n\tau^2$$

$$\operatorname{qn}(u; n | m) \equiv \sqrt{1 + n \operatorname{sn}^2(u | m)}$$

接触準要素→変数(2)

- 地球: $m=0$ と近似可能(問:確かめよ)

$$g \cong s + \sqrt{1 + \tau^2} u + \tan^{-1} \left(\frac{n \sin u \cos u}{1 + \sqrt{1 + n} + n \sin^2 u} \right)$$

$$J \cong \tan^{-1} \left(\tau \sqrt{1 + n \sin^2 u} \right)$$

$$\ell \cong \frac{\pi}{2} - u + \tan^{-1} \left[\frac{n \sin u \cos u}{\sqrt{1 + n} (1 + \sqrt{1 + n}) (1 - n \sin^2 u)} \right]$$

変数→接触準要素

- アンドワイエ変数による接触準要素の表現

$$\tau = (\tan J) \sqrt{\frac{1 + n \sin^2 \ell}{1 + n(1 + \tan^2 J \cos^2 \ell)}}$$

$$u = F\left(\frac{\pi}{2} - \ell + \tan^{-1}\left(\frac{n \sin \ell \cos \ell}{1 + \sqrt{1 + n + n \sin^2 \ell}}\right); m\right)$$

$$s = g - \sqrt{(1 + n)(1 + \tau^2)} \operatorname{pn}(u; n | m)$$

変数→接触準要素(2)

- 地球の場合: 再び $m=0$ としてよい

$$\tau \cong (\tan J) \sqrt{\frac{1+n \sin^2 \ell}{1+n+\tan^2 J \cos^2 \ell}}$$
$$u \cong \frac{\pi}{2} - \ell + \tan^{-1} \left(\frac{n \sin \ell \cos \ell}{1 + \sqrt{1+n+n \sin^2 \ell}} \right)$$
$$s \cong g - \sqrt{1+\tau^2} u + \tan^{-1} \left(\frac{n \sin u \cos u}{1 + \sqrt{1+n+n \sin^2 u}} \right)$$

準要素による偏微分

- アンドワイエ変数Jの偏微分(問:確かめよ)
 - 他の準要素による偏微分=0

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial J}{\partial \tau}\right)_{G_0, h_0, I_0, u, s} &= \frac{\operatorname{qn}(u; n | m)}{\operatorname{dn}(u | m)} + n \left(\frac{1 + \tau^2}{1 - m}\right) \frac{\operatorname{sn}(u | m) \operatorname{cn}(u | m)}{\operatorname{qn}(u; n | m)} \\ &\quad \times \left[(1 - m)u - \operatorname{en}(u | m) + m \frac{\operatorname{sn}(u | m) \operatorname{cn}(u | m)}{\operatorname{dn}(u | m)} \right] \\ \left(\frac{\partial J}{\partial u}\right)_{G_0, h_0, I_0, \tau, s} &= n\tau(1 + \tau^2) \frac{\operatorname{sn}(u | m) \operatorname{cn}(u | m)}{\operatorname{qn}(u; n | m)} \end{aligned}$$

準要素による偏微分(2)

- アンドワイエ変数 l の偏微分(問:確かめよ)
 - 他の準要素による偏微分=0

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial l}{\partial \tau}\right)_{G_0, h_0, I_0, u, s} &= \frac{-n\tau\sqrt{1+ndn(u|m)}}{(1-m)qn^2(u;n|m)} \\ &\times \left[\frac{(1-m)u - en(u|m)}{m} + n^2 \frac{\operatorname{sn}(u|m)\operatorname{cn}(u|m)}{\operatorname{dn}(u|m)} \right] \\ \left(\frac{\partial l}{\partial u}\right)_{G_0, h_0, I_0, \tau, s} &= \frac{-\sqrt{1+ndn(u|m)}}{qn^2(u;n|m)} \end{aligned}$$

準要素による偏微分(3)

- アンドワイエ変数gの偏微分(問:確かめよ)
 - 他の準要素による偏微分=0

$$\left(\frac{\partial g}{\partial \tau}\right)_{G_0, h_0, I_0, u, s} = \tau \sqrt{\frac{1+n}{1+\tau^2}} \left[\operatorname{en}(u|m) - \left(\frac{m}{1-m}\right) \frac{\operatorname{sn}(u|m)\operatorname{cn}(u|m)}{\operatorname{dn}(u|m)} \right]$$

$$\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)_{G_0, h_0, I_0, \tau, s} = \frac{\sqrt{(1+n)(1+\tau^2)}}{\operatorname{qn}^2(u; n|m)}$$

$$\left(\frac{\partial g}{\partial s}\right)_{G_0, h_0, I_0, \tau, u} = 1$$

準要素の運動方程式

- G, h, l: アンドワイエ変数の場合と同じ
- 他の準要素の運動方程式
 - 問: 確かめよ(少し難しいかも)

$$\frac{d\tau}{dt} = v_\tau, \quad \frac{du}{dt} = \sqrt{\frac{1+n}{1+\tau^2}} (b-c)G + v_u, \quad \frac{ds}{dt} = cG + v_s$$

$$v_\tau = \frac{1+\tau^2}{\tau} \left[\frac{m \operatorname{sn}(u|m) \operatorname{cn}(u|m)}{\sqrt{1+n}} \left(\frac{\Omega_M}{\sin J} \right) + \frac{\operatorname{dn}(u|m)}{\operatorname{qn}(u;n|m)} \left(\frac{N_G}{G} \cot J - \Omega_J \right) \right]$$

$$\operatorname{qn}(u;n|m) \equiv \sqrt{1+n \operatorname{sn}^2(u|m)} \quad \sin J = \frac{\tau}{\sqrt{1+\tau^2}} \operatorname{qn}(u;n|m)$$

準要素の運動方程式(2)

$$v_u = \left(\frac{n\tau(1+\tau^2)\text{fn}(u|m)}{\text{qn}(u;n|m)} \right) \left[\Omega_J - \left(\frac{N_G}{G} \right) \cot J \right] - \left[\frac{\text{qn}^2(u;n|m) + n(1+\tau^2)\text{sn}(u|m)\text{cn}(u|m)\text{fn}(u|m)}{\sqrt{1+n}} \right] \left(\frac{\Omega_M}{\sin J} \right)$$

$$v_s = -(\Omega_G + \Omega_M \cot J) - \left(\frac{v_u \sqrt{(1+n)(1+\tau^2)}}{\text{qn}^2(u;n|m)} \right) - \tau v_\tau \sqrt{\frac{1+n}{1+\tau^2}} \left[\text{pn}(u;-m|m) + \frac{n(1+\tau^2)\text{fn}(u|m)}{\text{qn}^2(u;n|m)\text{dn}(u|m)} \right]$$

$$\text{fn}(u|m) \equiv \text{dn}(u|m) \left[u - \text{pn}(u;-m|m) \right]$$

第2の接触準要素

- 別の接触準要素の例 (L, τ, u, s)
 - 慣性系における角運動量ベクトル L
 - ほかに3つは最初の準要素と同じ
- 問
 - 適当な変数との相互変換式を導け
 - 変数の準要素による偏微分表現を求めよ
 - 準要素の運動方程式を求めよ

エンケの方法

- アイデア: 近似解析解との差を数値積分
- オイラーの運動方程式の場合の一例
 - 近似解=C軸周りの一様回転

$$\omega_A \cong \omega_B \cong 0, \omega_C \cong \omega_0, \psi \cong \psi_0, \theta \cong \theta_0, \phi \cong \phi_0 + \omega_0 t$$

- 小さい無次元化変数への変換

$$m_A \cong \frac{\omega_A}{\omega_0}, m_B \cong \frac{\omega_B}{\omega_0}, m_C \cong \frac{\omega_C}{\omega_0} - 1$$

$$\sigma \cong \omega_0 t$$

$$\Delta\psi \cong \psi - \psi_0, \Delta\theta \cong \theta - \theta_0, \Delta\phi \cong \phi - \phi_0 - \sigma$$

エンケの方法(2)

- 変換後の方程式(=極運動方程式)(問:示せ)

$$\frac{dm_A}{d\sigma} = \frac{aN_A}{\omega_0^2} - \alpha(1+m_C)m_B$$

$$\frac{dm_B}{d\sigma} = \frac{bN_B}{\omega_0^2} - \beta(1+m_C)m_A$$

$$\frac{dm_C}{d\sigma} = \frac{cN_C}{\omega_0^2} - \gamma m_A m_B$$

$$\frac{d\Delta\psi}{d\sigma} = \frac{m_A \sin \phi + m_B \cos \phi}{\sin \theta}$$

$$\frac{d\Delta\theta}{d\sigma} = m_A \cos \phi - m_B \sin \phi$$

$$\frac{d\Delta\phi}{d\sigma} = m_C - \left(\frac{d\Delta\psi}{d\sigma} \right) \cos \theta$$

$$\psi \equiv \psi_0 + \Delta\psi$$

$$\theta \equiv \theta_0 + \Delta\theta$$

$$\phi \equiv \phi_0 + \sigma + \Delta\phi$$

エンケの方法(3)

■ セレ正準変数の場合の例

- 近似解: A=Bの場合の自由回転の解

$$L = L_0, G = G_0, H = H_0, \ell = \ell_0 + n_\ell t, g = g_0 + n_g t, h = h_0$$

- 平均運動
の再定義

$$n_\ell \equiv -\left(\frac{a+b}{2} - c\right)L_0, n_g \equiv \left(\frac{a+b}{2}\right)G_0$$

- 近似解との差を表現する変数への変換

$$\Delta L \equiv L - L_0, \Delta G \equiv G - G_0, \Delta H \equiv H - H_0, \Delta h \equiv h - h_0$$

$$\Delta \ell \equiv \ell - \ell_0 - n_\ell t, \Delta g \equiv g - g_0 - n_g t$$

エンケの方法(4)

■変換後の運動方程式(問:示せ)

$$\frac{d\Delta G}{dt} = \left(\frac{\partial V}{\partial g} \right) \quad \frac{d\Delta L}{dt} = - \left(\frac{a-b}{2} \right) (G^2 - L^2) \sin 2\ell + \left(\frac{\partial V}{\partial \ell} \right)$$

$$\frac{d\Delta H}{dt} = \left(\frac{\partial V}{\partial h} \right) \quad \frac{d\Delta \ell}{dt} = - \left(\frac{a+b}{2} - c \right) \Delta L + \left(\frac{a-b}{2} \right) L \cos 2\ell - \left(\frac{\partial V}{\partial L} \right)$$

$$\frac{d\Delta h}{dt} = - \left(\frac{\partial V}{\partial H} \right) \quad \frac{d\Delta g}{dt} = \left(\frac{a+b}{2} \right) \Delta G - \left(\frac{a-b}{2} \right) G \cos 2\ell - \left(\frac{\partial V}{\partial G} \right)$$

$$L = L_0 + \Delta L, G = G_0 + \Delta G, H = H_0 + \Delta H, h = h_0 + \Delta h$$

$$\ell = \ell_0 + n_\ell t + \Delta \ell, g = g_0 + n_g t + \Delta g$$

■ エンケの方法(5)

■ 第2の接触準要素の場合の例

- 近似解: 一般の自由回転の解

$$\mathbf{L} \cong \mathbf{L}_0, \tau \cong \tau_0, u \cong u_0 + n_u t, s \cong s_0 + n_s t$$

- 平均運動

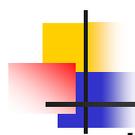
$$n_u \cong \frac{G_0 \sqrt{(a-c)(b-c)}}{\sqrt{1+\tau_0^2}}, n_s \cong c G_0$$

$$G_0 \cong |\mathbf{L}_0|$$

- 近似解との差を表現する変数への変換

$$\Delta \mathbf{L} \equiv \mathbf{L} - \mathbf{L}_0, \Delta \tau \equiv \tau - \tau_0$$

$$\Delta u \equiv u - u_0 - n_u t, \Delta s \equiv s - s_0 - n_s t$$



エンケの方法(6)

■ 変換後の運動方程式(問: 示せ)

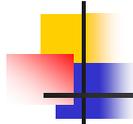
$$\frac{d\Delta L}{dt} = N, \quad \frac{d\Delta\tau}{dt} = v_\tau, \quad \frac{d\Delta s}{dt} = c\Delta G + \Omega_s$$

$$\frac{d\Delta u}{dt} = \sqrt{\frac{(a-c)(b-c)}{1+\tau^2}} \left[\Delta G + \frac{G_0(\tau+\tau_0)\Delta\tau}{\sqrt{1+\tau_0^2}(\sqrt{1+\tau^2} + \sqrt{1+\tau_0^2})} \right] + \Omega_u$$

$$\Delta G \equiv \frac{(\mathbf{L} + \mathbf{L}_0) \cdot \Delta \mathbf{L}}{G + G_0}$$

$$G \equiv \sqrt{\mathbf{L}^2}, \quad G_0 \equiv \sqrt{\mathbf{L}_0^2}$$

$$\mathbf{L} \equiv \mathbf{L}_0 + \Delta \mathbf{L}, \quad \tau \equiv \tau_0 + \Delta\tau, \quad u \equiv u_0 + n_u t + \Delta u, \quad s \equiv s_0 + n_s t + \Delta s$$



高速回転の困難

- 通常の方法
 - $A=B$ のとき回転角が陽に絡む
 - 数値積分のステップを小さくする必要あり
- 解決法($A=B$ のとき)
 - ポアッソン近似+オポルツァー(Oppolzer)項
 - 慣性系記法
- 他の方法: 高速積分法、高速計算機、...

ポアッソン近似

- 仮定1: $A=B$ $N_C = 0 \rightarrow \frac{dL_C}{dt} = 0 \rightarrow L_C = C\omega_0$

- 仮定2: 回転軸 = 角運動量軸 = 形状軸

$$L_A = L_B = 0 \rightarrow \mathbf{L} = C\omega_0 \mathbf{e}_C$$

- 近似運動方程式(問: 示せ) $\frac{d\mathbf{e}_C}{dt} = \frac{\mathbf{N}}{C\omega_0}$

$$\frac{d\psi_P}{dt} = \frac{N_X \cos\psi_P + N_Y \sin\psi_P}{C\omega_0 \sin\theta_P}$$

$$\frac{d\theta_P}{dt} = \frac{N_X \sin\psi_P - N_Y \cos\psi_P}{C\omega_0 \cos\theta_P}$$

$$\frac{d\phi_P}{dt} = \omega_0 - \left(\frac{d\psi_P}{dt} \right) \cos\theta_P$$

オポルツァー項

- 回転軸と形状軸の差 (= 極運動) の影響
 - ポアソン近似解の補正 $\theta_Q \equiv \theta - \theta_P, \psi_Q \equiv \psi - \psi_P$
- 補正項の近似運動方程式 (その1)

$$\frac{d\theta_Q}{dt} = \frac{-1}{C\omega_C \sin\theta_P} \left[\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \theta \partial \psi} \right)_P \theta_Q + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \psi^2} \right)_P \psi_Q \right] + \frac{A}{C\omega_C} \left[2 \left(\frac{d\psi_P}{dt} \right) \left(\frac{d\theta_P}{dt} \right) \cos\theta_P + \left(\frac{d^2\psi_P}{dt^2} \right) \sin\theta_P \right]$$

オポルツァー項(2)

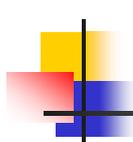
- 補正項の近似運動方程式(その2)

$$\begin{aligned} \frac{d\psi_Q}{dt} = & \frac{1}{C\omega_C \sin^2 \theta_P} \left[\left(\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} \right)_P \theta_Q + \left(\frac{\partial^2 U}{\partial \theta \partial \psi} \right)_P \psi_Q \right] \\ & + \frac{1}{\sin \theta_P} \left[\left(\frac{A}{C\omega_C} \right) \left\{ \left(\frac{d\psi_P}{dt} \right)^2 \sin \theta_P \cos \theta_P - \left(\frac{d^2 \theta_P}{dt^2} \right) \right\} \right. \\ & \left. - \left\{ \left(\frac{d\psi_P}{dt} \right) \cos \theta_P \right\} \theta_Q \right] \end{aligned}$$



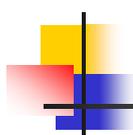
回転運動の数値積分法

- 一般の1階常微分方程式(ODE)が必要
 - 特殊な2階ODE用の手法(Störmer-Cowell法、Hermite積分法、特殊外挿法)は**使えない**
- 一般の手法
 - 単段法: Runge-Kutta法、一般外挿法
 - 多段法: Adams法
- シンプレクティック(symplectic)積分法
 - セレ正準変数方程式系に適用可能



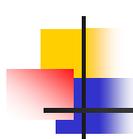
9. 非剛体効果

- 例:地球の非剛体効果
- 剛体 → 非剛体
 - 有限体固有座標軸:慣性主軸 → ティスラン平均軸
 - 運動方程式:オイラー → リューヴィル
 - 慣性モーメント:対角化・定常 → 非対角化・時間変動
 - 有限体の構成:単一 → 多成分系
 - 原理的な困難:流体の扱い(ポアンカレ近似)
- 非剛体章動理論:線形応答理論の応用



地球の非剛体性

- 多成分系: 地殻、マントル、(流体)外核、内核、...
 - 同一回転とは限らない→チャンドラー(Chandler)運動
- 弾性体反応: 地球潮汐、極潮汐
 - 比例係数: ラブ(Love)数、志田(Shida)数、...
- 散逸効果: 境界摩擦、磁場摩擦、重力摩擦
 - 未説明: 地球回転の永年減速
- 励起メカニズム
 - 減衰しない自由振動(極運動、自由コア章動など)
- 流体部分の影響: 海洋、大気、...



チャンドラー運動

- 地球の自由章動 (= 自由極運動)
 - 角速度A,B軸成分のほぼ単振動的運動
 - オイラー(剛体を仮定): $P=306\sim 325$ 日
- 実際の観測値(Chandler, AJ, 1891)
 - $P\sim 427$ 日(他に年周項も顕著)
- 大論争: 違いは何か?
 - Newcomb (1891) 地球の非剛体性が遠因
 - 国際緯度観測事業→緯度観測所@水沢

ティスラン座標系

- 非剛体の場合の有限体固有座標系の一つ
- ティスラン(Tisserand)の座標系定義
 - ある剛体回転座標系で回転角運動量を表現

$$\mathbf{L} = \int \mathbf{x} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} + \mathbf{v}) \rho(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} = \mathbf{I}\boldsymbol{\omega} + \mathbf{h}$$

- 内部運動による回転角運動量 \mathbf{h}
- 常に $\mathbf{h}=0$ となるように座標系を定義
- ティスラン平均軸=ティスラン座標系の座標軸

リウーヴィル運動方程式

- 出発点: 角運動量保存則 $\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N}$
- ティスラン座標系を採用
 - \mathbf{I} は時間と角速度の関数、非対角成分あり

$$\mathbf{I} \left(\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} \right) = \mathbf{N} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I} \boldsymbol{\omega} - \left(\frac{D\mathbf{I}}{Dt} \right) \boldsymbol{\omega}$$

- リウーヴィル(Liouville) の回転運動方程式
- \mathbf{I} の時間・角速度依存性のモデル化が必要

リューヴィル運動方程式

(2)

- **Iの分離** $\mathbf{I}(\boldsymbol{\omega}, t) = \mathbf{I}_0 + \Delta\mathbf{I}(\boldsymbol{\omega}, t)$
 - 対角定常成分と非対角非定常成分
- 運動方程式のオイラー的表記(問: 示せ)
 - 非対角成分が小さいと仮定(2次以上を無視)

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = \mathbf{W}_0 + \Delta\mathbf{W}$$

$$\mathbf{W}_0 \equiv \mathbf{I}_0^{-1} (\mathbf{N} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{I}_0 \boldsymbol{\omega})$$

$$\Delta\mathbf{W} \equiv -\mathbf{I}_0^{-1} \left[\Delta\mathbf{I} \mathbf{W}_0 + \left(\frac{D\Delta\mathbf{I}}{Dt} \right) \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times \Delta\mathbf{I} \boldsymbol{\omega} \right]$$

慣性系記法(11)

■ 変数 $(\psi, \theta, \phi, \mathbf{L})$

■ 非剛体でも不変

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N} \quad \boldsymbol{\omega} = \mathbf{I}^{-1}\mathbf{L}$$

$$(\mathbf{e}_A \quad \mathbf{e}_B \quad \mathbf{e}_C) = \mathbf{R}_3(\phi)\mathbf{R}_1(\theta)\mathbf{R}_3(\psi)$$

■ トルクは慣性系表現

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega_Z - \left(\frac{d\phi}{dt}\right) \cos \theta$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega_X \cos \psi + \omega_Y \sin \psi$$

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\omega_X \sin \psi - \omega_Y \cos \psi}{\sin \theta}$$

$$N_X = \frac{-3\mu}{r^5} [r_X r_Y I_{ZX} - r_Z r_X I_{XY} + (r_Y^2 - r_Z^2) I_{YZ} + r_Y r_Z (I_{ZZ} - I_{YY})]$$

慣性系記法(12)

- 変数 $(\xi, \eta, \zeta, \mathbf{L})$
- 微小角の困難を避ける1-2-3系列

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{N} \quad \boldsymbol{\omega} = \mathbf{I}^{-1}\mathbf{L}$$

$$(\mathbf{e}_A \ \mathbf{e}_B \ \mathbf{e}_C) = \mathbf{R}_3(\zeta)\mathbf{R}_2(\eta)\mathbf{R}_1(\xi)$$

$$\frac{d\xi}{dt} = \omega_X - \left(\frac{d\zeta}{dt}\right) \sin \eta$$

$$\frac{d\eta}{dt} = \omega_Y \cos \xi + \omega_Z \sin \xi$$

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{-\omega_Y \sin \xi + \omega_Z \cos \xi}{\cos \eta}$$

$$N_X = \frac{-3\mu}{r^5} [r_X r_Y I_{ZX} - r_Z r_X I_{XY} + (r_Y^2 - r_Z^2) I_{YZ} + r_Y r_Z (I_{ZZ} - I_{YY})]$$

慣性モーメントの補正

- 非剛体性による I の補正

$$I = I_0 + \Delta I \quad \Delta I = \Delta_S I + \Delta_P I + \Delta_F I$$

- 非剛体項 ΔI

- 固体潮汐: 潮汐力による変形 $\Delta_S I$
- 極潮汐: 遠心力による変形 $\Delta_P I$
- 内部摩擦: 他成分との摩擦による変形 $\Delta_F I$

- 連動して重力場係数も変化することに注意

固体潮汐 Earth tide

- 摂動天体の潮汐力による変形
 - 双極子型の変形 (P_2 モード) を仮定: ラブ数 = k_2

$$\Delta_E \mathbf{I}(t) = \left(\frac{k_2 R^5}{3G} \right) \sum \frac{m}{r^5} \left(\mathbf{r} \otimes \mathbf{r} - \frac{r^2}{3} \mathbf{1} \right)_{t-\tau_2}$$

- 有限体の赤道半径: R
- ニュートンの万有引力定数: G
- **時間遅れ**: $\tau_2 \rightarrow$ エネルギーの散逸

極潮汐 Pole Tide

- 回転の遠心力による変形
 - 同じく双極子型の変形(P₂モード)を仮定

$$\Delta_P \mathbf{I}(t) = \left(\frac{k_2 R^5}{3G} \right) \left(\boldsymbol{\omega} \otimes \boldsymbol{\omega} - \frac{\omega^2}{3} \mathbf{1} \right)_{t-\tau_2}$$

- ここでも(わずかに)エネルギーの散逸

重力場係数の補正

- MacCullaghの公式の応用→トルク計算

$$GMR^2 C_{20} = \frac{I_{AA} + I_{BB}}{2} - I_{CC}$$

$$GMR^2 C_{21} = -I_{AC}$$

$$GMR^2 S_{21} = -I_{BC}$$

$$GMR^2 C_{22} = \frac{I_{BB} - I_{AA}}{4}$$

$$GMR^2 S_{22} = -I_{AB}$$

$$I_{JK} \equiv \mathbf{e}_J \cdot \mathbf{I} \mathbf{e}_K$$

ポアンカレ流体核理論

- 2成分系: マントル(mantle) + 流体核

- 全運動エネルギー $2T \equiv \boldsymbol{\omega}_M \mathbf{I}_M \boldsymbol{\omega}_M + \boldsymbol{\omega}_C \mathbf{I}_C \boldsymbol{\omega}_C$

- 差分角速度の導入 $\Delta\boldsymbol{\omega}_C \equiv \boldsymbol{\omega}_C - \boldsymbol{\omega}_M$

- **運動方程式**

- 変分原理から
直接導出可能

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}_M} \right) + \boldsymbol{\omega}_M \times \left(\frac{\partial T}{\partial \boldsymbol{\omega}_M} \right) = \mathbf{N}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \Delta\boldsymbol{\omega}_C} \right) - \Delta\boldsymbol{\omega}_C \times \left(\frac{\partial T}{\partial \Delta\boldsymbol{\omega}_C} \right) = 0$$

ポアンカレ理論(2)

- 近似運動方程式(高次項を無視)

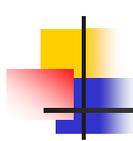
$$\frac{d(\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}_M + \mathbf{I}_C\Delta\boldsymbol{\omega}_C)}{dt} + \boldsymbol{\omega}_M \times (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}_M + \mathbf{I}_C\Delta\boldsymbol{\omega}_C) = \mathbf{N}$$

$$\frac{d(\mathbf{I}_C(\boldsymbol{\omega}_M + \Delta\boldsymbol{\omega}_C))}{dt} - \Delta\boldsymbol{\omega}_C \times \mathbf{I}_C\boldsymbol{\omega}_M = 0$$

$$\mathbf{I} \equiv \mathbf{I}_M + \mathbf{I}_C$$

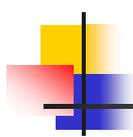
ポアンカレ理論(3)

- さらに回転対称近似 $A_M = B_M, A_C = B_C$
- 積分が二つ存在
- 4自由度系: 自由回転の固有モードが4つ
 - SA: Spin-Axisモード = 一様回転モード
 - TO: Tilt-Overモード = コアの一様回転モード
 - CW: チャンドラー運動 $P \sim (1-1/400)\text{days}$
 - FCN: 自由コア章動 $P \sim 431\text{days}$



10. 応用

- 基本1:地球回転
 - 応用:火星の回転
- 基本2:月の物理秤動=月の回転
 - 応用:水星
- 小惑星の回転:未知
- 人工衛星の回転



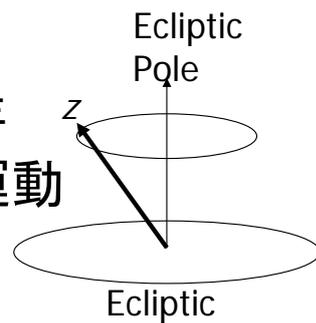
地球回転

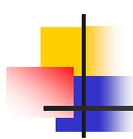
- 地球座標系と地心座標系の変換の基本
- 日周運動S...回転角UT1
- 極軸の運動
 - 準日周: 極運動W
 - 準日周以外: 歳差P + 章動N
- 行列表現

$$\mathbf{R} = \mathbf{W} \mathbf{S} \mathbf{N} \mathbf{P}$$

歳差・章動の概要

- 地球の極軸の運動(準日周以外の周期)
- 表現: 黄道座標系では2成分
 - 黄経、黄道傾角
- 歳差 = 超長期周期運動
 - 50秒角/年, 周期約2万6千年
- 章動 = 比較的短期の周期運動
 - 18.6年 (=章)、半年、9.3年、
- 新モデルへ移行中





歳差

- 発見: ヒッパルコス (~150BC)
- 旧歳差モデル: IAU1976
 - リースキLieske他 (1977, A&A)
 - 力学部分: ニューカム
 - 惑星質量の補正
 - 測地線歳差を加味
- 理論: 黄道座標系で構築
- 実用: 赤道座標系で表現

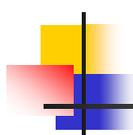
歳差のOppolzer表現

$$\mathbf{P} = \mathbf{R}_{323}(-\zeta_A, \theta_A, -z_A)$$

- 赤道座標系での3つの歳差角

$$\begin{pmatrix} \zeta_A \\ \theta_A \\ z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2306.2181 \\ 2004.3109 \\ 2306.2181 \end{pmatrix} T + \begin{pmatrix} 0.30188 \\ -0.42665 \\ 1.09468 \end{pmatrix} T^2 + \begin{pmatrix} 0.017998 \\ -0.041833 \\ 0.018203 \end{pmatrix} T^3$$

- 単位: 1秒角
- $T = (\text{JD} - 2451545.0) / 36525$



章動

- 発見:ブラッドレー (1747)
- 旧章動モデルIAU1980
 - Seidelmann他 (1981, CM)
 - 剛体地球解:Kinoshita (1977, CM)
 - 非剛体効果:Wahr (1981, GJRAS)
- 平均黄道傾角 (リースキ他, 1977)

$$\varepsilon_A = 23^\circ 26' 21''.448 - 46''.8150T \\ - 0''.00059T^2 + 0''.001813T^3$$

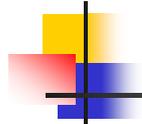
章動(2)

- 行列表現

$$\mathbf{N} = \mathbf{R}_{131}(\varepsilon_A, -\Delta\psi, -(\varepsilon_A + \Delta\varepsilon))$$

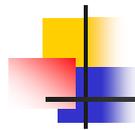
- 黄経の章動 $\Delta\psi$
- 黄道傾角の章動 $\Delta\varepsilon$
- 解析的表現

$$\begin{pmatrix} \Delta\psi \\ \Delta\varepsilon \end{pmatrix} = \sum_k \begin{pmatrix} \psi_k \sin A_k \\ \varepsilon_k \cos A_k \end{pmatrix}, \quad A_k = \sum_{j=1}^5 n_j \Omega_j$$



ドローネDelauney角

- 章動理論の主要5角度
 - 月の平均近点角 ℓ
 - 太陽の平均近点角 ℓ'
 - 月の平均緯度引数 F
 - 月と太陽の平均離角 D
 - 月の平均昇交点経度 Ω
- 他の角度 $L = F + \Omega$ $L' = L - D$ $\varpi' = L - D - \ell'$



ドローネ角の数値表現

- IERS Convention 2003 (2005)

$$\ell = 134.96340251^\circ + 1717915923.2178''T + 31.8792''T^2 \\ + 0.051635''T^3 - 0.00024470''T^4$$

$$\ell' = 357.52910918^\circ + 129596581.0481''T - 0.5532''T^2 \\ + 0.000136''T^3 - 0.00001149''T^4$$

$$F = 93.27209062^\circ + 1739527262.8478''T - 12.7512''T^2 \\ - 0.001037''T^3 + 0.00000417''T^4$$

$$D = 297.85019547^\circ + 160296160.2090''T - 6.3706''T^2 \\ + 0.006593''T^3 - 0.00003169''T^4$$

$$\Omega = 125.04455501^\circ - 6962890.5431''T + 7.4722''T^2 \\ + 0.007702''T^3 - 0.00005939''T^4$$

章動の主要項

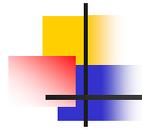
- IERS Convention 2003, 単位: 1秒角

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Delta\psi \\ \Delta\varepsilon \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -17.206 \sin \Omega \\ 9.205 \cos \Omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1.317 \sin 2L' \\ 0.573 \cos 2L' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.207 \sin 2\Omega \\ -0.090 \cos 2\Omega \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} -0.228 \sin 2L \\ 0.098 \cos 2L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.148 \sin \ell' \\ 0.007 \cos \ell' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.071 \sin \ell \\ -0.001 \cos \ell \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} -0.052 \sin (2L' + \ell') \\ 0.022 \cos (2L' + \ell') \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -0.030 \sin (2L + \ell) \\ 0.013 \cos (2L + \ell) \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} 0.022 \sin (2L' - \ell') \\ -0.010 \cos (2L' - \ell') \end{pmatrix} \dots \end{aligned}$$

恒星時回転

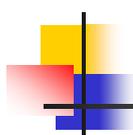
- ほとんど一様、準日周回転
 - $\Omega_0 = 7.2921150(1) \times 10^{-5}$ ラジアン/秒
- 回転速度 = 1恒星日で360度
~ 365.2422.../366.2422... 回転/日
- グリニッチ視恒星時GAST = Θ

$$S = R_3(\Theta)$$



一様回転からのずれ

- UTC → UT1 → GMST → GAST
 - DUT1 = UT1-UTC: 予測不能
 - GMST = GMST₀ + r UT1 + ...
 - 恒星時/世界時の比: $r \sim 1.0027379...$
 - GAST = GMST + $\Delta\psi \cos \varepsilon$ + ...
- 日の長さLOD = $2\pi/\Omega$



極運動

- 地球上で見た(ゆっくりとした)極の動き
 - 記号: (x_p, y_p) 、大きさ: 0.1秒角~30m
 - 代表的周期: 年周、チャンドラー周期 (~14月)
- 予測不可能: 監視の必要あり

$$\mathbf{W} = \mathbf{R}_2(-x_p) \mathbf{R}_1(-y_p)$$



地球姿勢パラメーター

- 地球姿勢パラメーターEOP
 - DUT1, LOD, x_p , y_p , 極位置のずれ
 - 古い用語: 地球回転パラメーターERP
- 極位置のずれ = 歳差・章動理論の誤差
- 国際地球回転監視事業IERS
 - 1984年から, IAUとIUGGの共同事業
 - WEBサイト: <http://www.iers.org/>



月の物理秤動

- 月の秤動(ひょうどう)libration
 - = 月面模様の見かけの運動
 - = 光学秤動 + 物理秤動
- 光学秤動
 - カッシニの法則 + 月の軌道運動に起因
- 物理秤動
 - 物理秤動: カッシニの法則からのずれ

カッシニの法則

- 初代カッシニ(報告1693,出版1730)
- カッシニの法則(=近似法則)
 - 月の回転のオイラー角(黄道座標系に対する)

$$\psi \simeq \Omega, \quad \theta \simeq -\theta_0, \quad \phi \simeq F + \pi$$

- ドローネ角(月の軌道運動の基本角) F, Ω
- 月の赤道の月の公転軌道(白道)に対する平均傾斜角(Eckhardt 1981) $\theta_0 = 5753''$

物理秤動角

- 物理秤動角の導入

$$\sigma \equiv \psi - \Omega, \quad \rho \equiv -(\theta - \theta_0), \quad \tau \equiv \phi + \psi - L - \pi$$

- 解析解: Eckhardt(1981), Moons(1982)

- 変数変換(微小角の困難を避けるため)

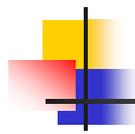
$$(p_A \equiv -\sin \theta \sin \phi, p_B \equiv -\sin \theta \cos \phi, \tau)$$

- 数値解: NASA/JPLのDE

- ラグランジュ記法、直接数値積分

Development Ephemeris (DE)

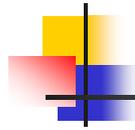
- 数値天体暦の代表：NASA/JPL
- 国立天文台データセンターから利用可
 - 利用ソフト(Fortran/C) + バイナリー・ファイル
 - DE408: BC10000-AD10000
 - 太陽・月・九惑星の位置速度
 - 特定の版では月の物理秤動角も提供
- 衛星を含む全天体：HORIZONSシステム
 - <http://ssd.jpl.nasa.gov/>



物理秤動の主要項

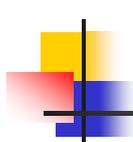
- Moons (1982, CMDA) 単位: 1秒角
 - $d = \text{JD} - 2451545.0$

$$\begin{aligned} \tau = & 174.27 + 90.69 \sin \ell' - 16.79 \sin \ell + 16.79 \sin (2\ell - 2F) \\ & - 14.29 \sin (55.27^\circ + 0.036378^\circ d) + 9.94 \sin (2\ell - 2D) \\ & - 8.09 \sin (1.68^\circ + 0.529524^\circ d) - 6.74 \cos (\ell - F) \\ & + 4.13 \sin (\ell - 2D) - 3.46 \sin (\ell - D) + 1.65 \sin (2F - 2D) \\ & - 1.39 \sin (\ell - F) - 1.15 \sin (\ell - \ell' - D) + 1.00 \cos F + \dots \end{aligned}$$



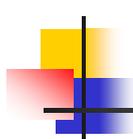
物理秤動の主要項(2)

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} p_A \\ p_B \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 5562.01 \sin F \\ 5539.88 \cos F \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 124.48 \sin(\ell - F) \\ -75.40 \cos(\ell - F) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -74.58 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} 9.03 \sin L \\ 9.03 \cos L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -7.29 \cos L \\ 7.29 \sin L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4.68 \cos F \\ -4.70 \sin F \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} 2.91 \sin(F - 2D) \\ -3.20 \cos(F - 2D) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2.68 \sin(\ell + F - 2D) \\ -1.61 \cos(\ell + F - 2D) \end{pmatrix} \\ &+ \begin{pmatrix} 1.57 \sin(\ell + F) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1.24 \sin(\ell' + F) \\ 1.28 \cos(\ell' + F) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1.02 \sin(\ell' - F) \\ -1.09 \cos(\ell' - F) \end{pmatrix} \dots \end{aligned}$$



11. 相対論効果

- 剛体の非存在 ← 速度が光速以下
 - 非剛体に似た扱い: ティスラン平均軸など
- 基底ベクトルの4つ組 (tetrad)
- 4つ組の自由回転 = 重力以外の作用0
- フェルミ・ウォーカー移動方程式
 - 曲がった時空における局所角運動量保存則
 - トルクなし = フェルミ移動



慣性系の引きずり

- 局所的な原点平行移動 \neq 大局的な非回転
 - コリオリ力なし \neq 遠いクェーサーに対して静止
- フェルミ(Fermi)移動
 - 平行移動の相対論的拡張
 - フェルミ・ウォーカー移動 $=$ フェルミ移動 $+$ 回転
- 固有座標系 $=$ フェルミ移動された座標系

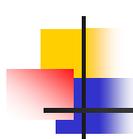
測地線回転

- フェルミ移動する4つ組の空間回転部分
- 特殊相対論: トーマス歳差 $\frac{\mathbf{v} \times \mathbf{a}}{c^3}$
- 一般相対論
 - 測地線歳差 $\frac{(1+\gamma)\mathbf{v} \times \nabla\phi}{c^3}$
 - ~1.92秒角/世紀
 - ド・ジッター(1917)
 - 測地線章動 (Fukushima 1991) $\frac{\nabla \times \mathbf{g}}{c^3}$
 - レンズ・シリング効果



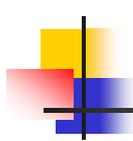
12.参考文献

- ゴールドスタイン;1983、「新版古典力学上・下」、瀬川・矢野・江沢訳、吉岡書店
- 井上(監修)、瀬藤・吉田著;1983、「古典力学の問題と解説」、吉岡書店
- 笹尾哲夫;1982、「地球回転運動」、東京大学大学院講義ノート(自費出版)
- 戸田盛和;1976、「楕円関数入門」、日本評論社



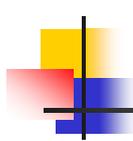
参考文献(2)

- 堀源一郎; 1978、「天体力学特論」、東京大学大学院講義ノート(聞き書き)
- 堀源一郎; 1990、「はじめての力学講義」、丸善
- Byrd and Friedman; 1954, *Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Physicists*, Springer
- Beutler; 2005, *Methods of Celestial Mechanics I & II*, Springer



参考文献(3)

- Kovalevsky et al. (ed.); 1989, *Reference Systems*, Kluwer
- MacMillan; 1936, *Dynamics of Rigid Bodies*, Dover
- McCarthy and Petit (eds); 2005, *IERS Convention 2003*, IERS Tech. Note 32
- Misner, Thorne, and Wheeler; 1973, *Gravitation*, W.H. Freeman



参考文献(4)

- Moritz and Mueller; 1986, *Earth Rotation: Theory and Observation*, Ungar
- Seidelmann (ed.); 1992, *Explanatory Supplement To Astronomical Almanac*, Univ. Sci. Books
- Whittaker; 1961, *A Treatise on Analytical Dynamics, 4th ed.*, Dover

講師



- 福島登志夫
- 自然科学研究機構
国立天文台 (NAOJ)
- 181-8588 東京都三鷹市大沢2-21-1
- Toshio.Fukushima@nao.ac.jp
- <http://chiron.mtk.nao.ac.jp/~toshio/>