# 位置天文学特論I

福島登志夫

## Contents

# 1　時間と空間の物理学

## 1.1　座標系と物理量

なぜ一般相対論？ → 新しい観測技術の発展

1. 時計

   H-maser, Rb, Cs, Pulser $\sim 10^{-15}$

2. R & RR (Range & Range Rate)

   Viking, Voyager, Magellan, Galileo, Cassini, Phobos, Mar Sarveyer/Path Finder/Polar Lander, Bepi Colombo

$$c(t_2 - t_1) = r + \cdots$$
$$6\mathrm{m}/0.7\mathrm{AU} \sim 6\mathrm{m}/10^{11}\mathrm{m} \sim 10^{-10}$$

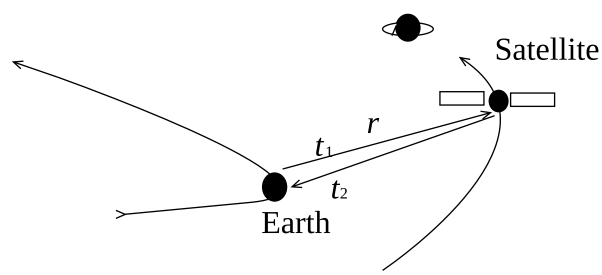



Figure 1: R & RR (Range & Range Rate)

3. LLR/SLR (Lunar/Satellite Laser Ranging)

   Lageos I,II, Ajisaai, Starlette, Etalon I, II, GEOIK 1,2,3, ...

$$c(t_2 - t_1) = r + \cdots$$
$$1\mathrm{mm}/10^4\mathrm{km} \sim 10^{-10}$$

4. VLBI (Very Large Baseline Interferometry)

   For guasac, AGN, radio sources

   EVN, VLBA, VERA

$$c(t_2 - t_1) = \boldsymbol{b} \cdot \hat{\boldsymbol{k}} + \cdots$$
$$1\mathrm{cm}/10^4\mathrm{km} \sim 10^{-9}$$

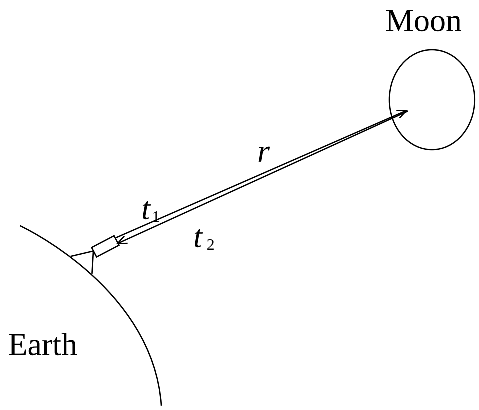



Figure 2: LLR/SLR (Lunar/Satellite Laser Ranging)

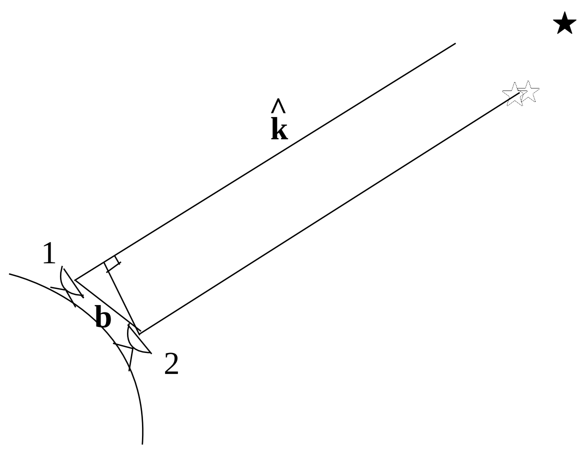



Figure 3: VLBI (Very Large Baseline Interferometry)

(a) Space VLBI
VSOP

$$c(t_2 - t_1) = \boldsymbol{b} \cdot \hat{\boldsymbol{k}} + \cdots$$
$$1\mathrm{cm}/10^5\mathrm{km} \sim 10^{-10}$$

5. GPS/GLONASS
二重差

$$c(t_{2A} - t_{1A} - t_{2B} + t_{1B}) = r_{2A} - r_{1A} - r_{2B} + r_{1B} + \cdots$$
$$1\mathrm{mm}/10\mathrm{km} \sim 1\mathrm{mm}/100\mathrm{km} \sim 10^{-7} \sim 10^{-8}$$

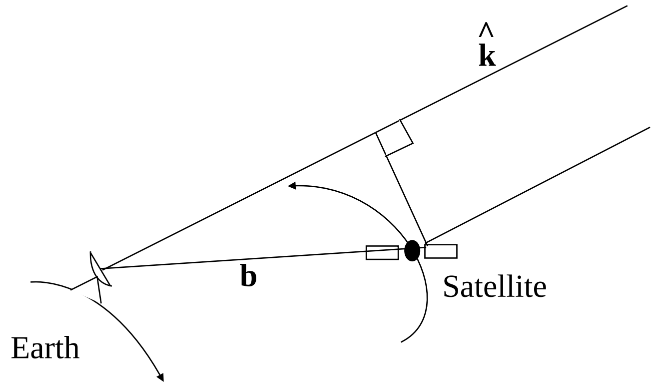



Figure 4: Space VLBI

6. Pulsar Arrival Time Analysis

$$c(t_2 - t_1) = (\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1) \cdot \hat{\boldsymbol{k}} + \cdots$$

7. 逆 LR, SSLR (Satellite-Satellite Laser Ranging)

8. SCG (Super Conducting Gravimeter)

Order of Magnitudes

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| ニュートン力学 | | 1 | | | |
| 特殊相対論 | 光行差 | $\frac{v}{c}$ | $10^{-6}$ | $10^{-4}$ | $3 \times 10^{-3}$ |
| | ドップラー偏位 | | | | |
| 一般相対論 | 光の曲がり | $(\frac{v}{c})^2$ | $10^{-12}$ | $10^{-8}$ | $10^{-5}$ |
| | 光の遅れ | | | | |
| | 近点移動 | | | | |
| | | $(\frac{v}{c})^3$ | | $10^{-12}$ | $3 \times 10^{-8}$ |
| | | $(\frac{v}{c})^4$ | | $10^{-16}$ | $10^{-10}$ |
| | 重力波 | $(\frac{v}{c})^5$ | | $10^{-20}$ | $3 \times 10^{-13}$ |

Table 1: 相対論的効果とその大きさ．

方法論

弱い重力場での近似（ポスト・ニュートン近似，一部ポスト・ポスト・ニュートン）

手法

1 次摂動論（まれに 2 次）

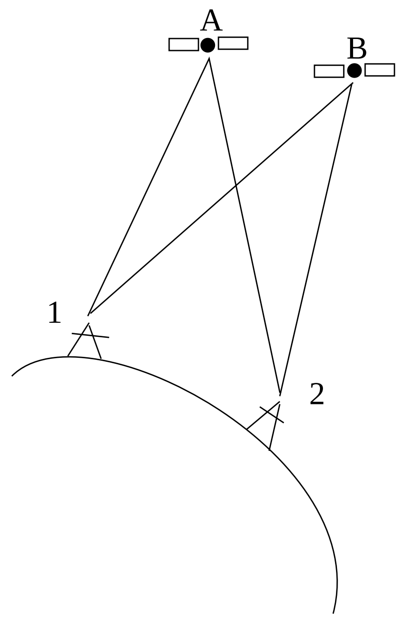



Figure 5: Space GPS

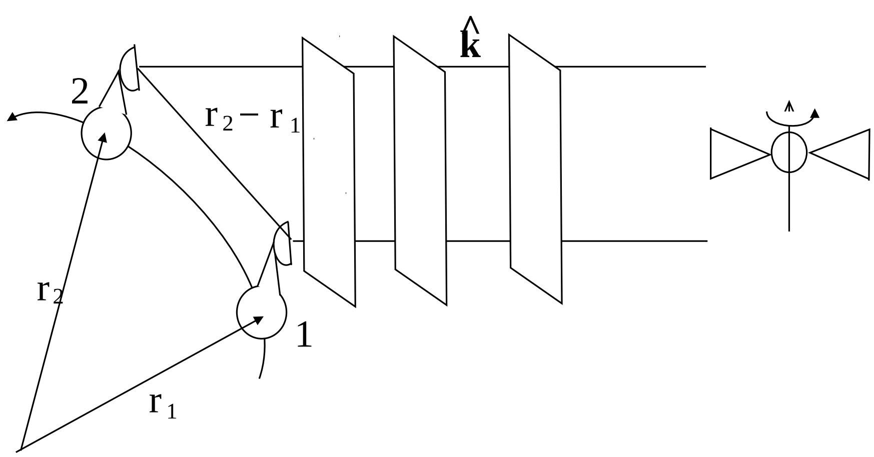



Figure 6: Pulsar Arrival Time Analysis

## 1.2　一般相対論以前の枠組（質点力学）

### 1.2.1　ニュートン力学

空間反転 3，または鏡映

$$\mathcal{M}_x = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{pmatrix} \tag{1}$$

$$\mathcal{M}_y = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{pmatrix} \tag{2}$$

$$\mathcal{M}_z = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{3}$$

および回転

$$\mathcal{R}_x(\theta) = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{4}$$

$$\mathcal{R}_y(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix} \tag{5}$$

$$\mathcal{R}_z(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{6}$$

質量

$$m = \int \rho(\boldsymbol{x}) d\boldsymbol{x} \tag{7}$$

運動量/速度

$$\boldsymbol{p} = m\boldsymbol{v}, \quad \boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} \tag{8}$$

不変量

$$(d\ell)^2 = (d\boldsymbol{x})^2 = \text{不変} \tag{9}$$

$$\Rightarrow 3\,\text{次元直交変換}\; R_i^{\tilde{a}} \delta_{\tilde{a}\tilde{b}} R_j^{\tilde{b}} = \delta_{ij} \tag{10}$$

運動の法則

1. 力が働かなければ物体は等速直線運動する.

$$\boldsymbol{F} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{v}_0 t \tag{11}$$

2. 運動方程式

$$\frac{d\boldsymbol{p}}{dt} = \boldsymbol{F} \tag{12}$$

3. 作用反作用の法則

$$\boldsymbol{F}_{12} = -\boldsymbol{F}_{21} \tag{13}$$

### 1.2.2　万有引力（ニュートンの重力理論）

2 点間に働く引力

$$\boldsymbol{F}_{12} = -\frac{Gm_1m_2}{r_{12}^3}\boldsymbol{r}_{12} \tag{14}$$

場

$$\boldsymbol{F} = m\frac{\partial U}{\partial \boldsymbol{x}} \tag{15}$$

$U$ : 力関数（Force Function）= -（ポテンシャル）

場の方程式（Poisson 方程式）

$$\Delta U(\boldsymbol{x}) = 4\pi G\rho(\boldsymbol{x}). \qquad \text{（線形方程式）} \tag{16}$$

$$U(\boldsymbol{x}) = \int \frac{\rho(\boldsymbol{x})')}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} d^3\boldsymbol{x}' \tag{17}$$

単連続有限体による引力

$1/r$ を（球面）調和展開

$$U = \frac{GM}{r} + GM\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{a}{r}\right)^n \sum_{m=0}^{n} P_n^m(\sin\beta)\left(C_{nm}\cos m\lambda + S_{nm}\sin m\lambda\right) \tag{18}$$

$$\text{基底} : r^{-(n+1)}e^{im\phi}P_n^m(\cos\theta) \tag{19}$$

### 1.3　特殊相対性理論

時空（Spacetime）

$$x^\mu = (x^0 \equiv ct, \overbrace{x^1, x^2, x^3}^{\boldsymbol{x}}) \tag{20}$$

| | | |
|---|---|---|
| 肩付き添字 | ギリシャ文字 | $0 \to 3$ |
| | ラテン文字 | $1 \to 3$ |

不変量

$$\begin{aligned}(\Delta s)^2 &= -c^2(\Delta t)^2 + (\Delta \boldsymbol{x})^2 \\ &= \eta_{\mu\nu}\Delta x^\mu \Delta x^\nu \end{aligned} \tag{21}$$

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{（ミンコフスキー行列）} \tag{22}$$

$$\Delta t = t - t_0, \Delta \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}_0, \text{etc} \ldots$$

アインシュタインの規約

上と下に同じ添字が現れたらその添字に対して足し上げる．

$$\eta_{\mu\nu}\Delta x^\mu \Delta x^\nu = \sum_{\mu,\nu=0}^{3} \eta_{\mu\nu}\Delta x^\mu \Delta x^\nu \tag{23}$$

$$A^{ii} \neq \sum_{i=1}^{3} A^{ii}, \quad A^i_i = \sum_{i=1}^{3} A^i_i$$

ギリシャ文字；0 から 3 まで

ラテン文字：1 から 3 まで

不変量は**ローレンツ変換という座標変換**に対して不変に保たれる．すなわち，

$$\Delta x^\mu = L^\mu_{\tilde{\alpha}} \Delta x^{\tilde{\alpha}} \tag{24}$$

という座標変換[1] に対して．

$$\begin{aligned}(\Delta s)^2 &= \eta_{\mu\nu}\Delta x^\mu \Delta^\nu \\ &= \eta_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}\Delta x^{\tilde{\alpha}} \Delta x^{\tilde{\beta}}\end{aligned}$$

[1] 座標系が異なるのでそれぞれで別の添字，または座標変数を用いる．

となる．一般に $L^{\tilde{\alpha}}_{\mu}$ は $4\times 4$ 行列である．ローレンツ変換はポアンカレ変換，

$$X^{\tilde{\alpha}} = X^{\tilde{\alpha}}_0 + L^{\tilde{\alpha}}_{\mu} X^{\mu}, \quad (X^{\tilde{\alpha}}_0 \text{は座標原点}) \tag{25}$$

の中に含まれる座標変換の一つである．

#### 1.3.1 $L^{\tilde{\alpha}}_{\mu}$ の性質

$$(\Delta s)^2 = \eta_{\mu\nu}\Delta x^{\mu}\Delta x^{\nu} = \eta_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}\Delta x^{\tilde{\alpha}}\Delta x^{\tilde{\beta}} = \eta_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} L^{\tilde{\alpha}}_{\mu}\Delta x^{\mu} L^{\tilde{\beta}}_{\nu}\Delta x^{\nu} \tag{26}$$

より，

$$\eta_{\mu\nu} = \eta_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} L^{\tilde{\alpha}}_{\mu} L^{\tilde{\beta}}_{\nu}. \tag{27}$$

$L^{\tilde{\alpha}}_{\mu}$ は 10 成分（10 パラメータ）を持つ一種の 4 次元直交行列（ローレンツ群）．

$$10 = 4(\text{反転}) + 3(\text{空間回転}) + 3(\text{Boost})$$

反転

$$\mathcal{M}_t = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \cdots \tag{28}$$

空間回転

$$\mathcal{R}_x(\theta) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}, \cdots \tag{29}$$

Boost

$$L_x(\alpha) = \begin{pmatrix} \cosh\alpha & \sinh\alpha & 0 & 0 \\ \sinh\alpha & \cosh\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (\text{対称行列}). \tag{30}$$

$\alpha$ はある種の回転角．

$$\tan\theta = \tanh\alpha = \beta = \frac{v}{c}, \quad \cosh\alpha = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \equiv \gamma, \quad \sinh\alpha = \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma\beta$$

注：ここで現れる $\beta, \gamma$ は PPN パラメータではない．

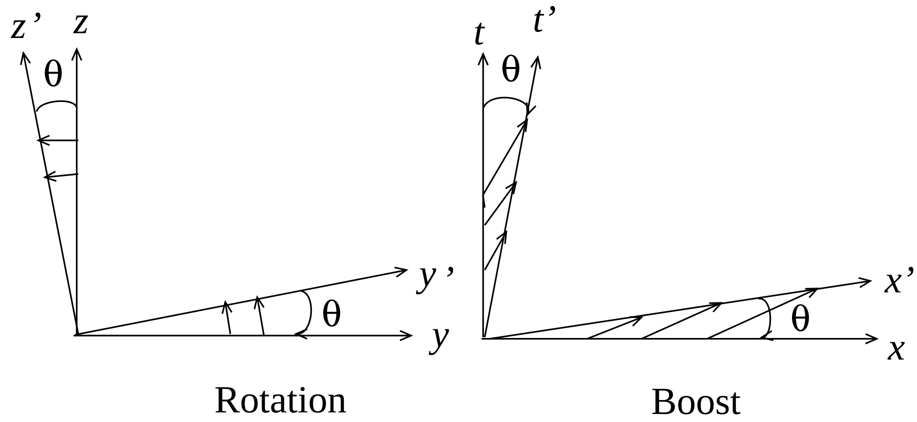



Figure 7: 回転と Boost

#### 1.3.2 Boost

いま $S'$ 系が $S$ 系に対して速度 $\boldsymbol{v} = v\boldsymbol{n}$ で運動している.

$$L_{\mu}^{\alpha'} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma^t \frac{\boldsymbol{v}}{c} \\ -\gamma \frac{\boldsymbol{v}}{c} & \boldsymbol{I} + (\gamma - 1)\boldsymbol{n} \otimes \boldsymbol{n} \end{pmatrix} \tag{31}$$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{\boldsymbol{v}}{c}\right)^2}}, \quad \boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{v}}{v}, \quad (\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b})_{ij} = a_i b_j, \quad \text{（テンソル積）}$$

この逆変換は $\boldsymbol{v} \to -\boldsymbol{v}$ とすればよい.

$$L_{\mu}^{\tilde{\alpha}}(\boldsymbol{v}) = L_{\tilde{\alpha}}^{\mu}(-\boldsymbol{v}) \tag{32}$$

$\Delta x^{\tilde{\alpha}} = L_{\mu}^{\tilde{\alpha}} \Delta x^{\mu}$ を用いて具体的に変換式を求めると,

$$\begin{cases} \Delta \tilde{t} = \gamma \left( \Delta t - \frac{\boldsymbol{v} \cdot \Delta \boldsymbol{x}}{c^2} \right) \\ \Delta \tilde{x} = \Delta x - \gamma \boldsymbol{v} \Delta t + (\gamma - 1)(\boldsymbol{n} \cdot \Delta \boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{n} \end{cases} \tag{33}$$

逆変換

$$\begin{cases} \Delta t = \gamma \left( \Delta \tilde{t} + \frac{\boldsymbol{v} \cdot \Delta \tilde{\boldsymbol{x}}}{c^2} \right) \\ \Delta x = \Delta \tilde{x} + \gamma \boldsymbol{v} \Delta \tilde{t} + (\gamma - 1)(\boldsymbol{n} \cdot \Delta \tilde{\boldsymbol{x}}) \cdot \boldsymbol{n} \end{cases} \tag{34}$$

$\tilde{S}$ 系の運動

$$\Delta \tilde{\boldsymbol{x}} = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta t = \gamma \Delta \tilde{t} \\ \Delta x = \gamma \boldsymbol{v} \Delta \tilde{t} = \boldsymbol{v} \Delta t \end{cases} \tag{35}$$

ゆえに, $S$ 系で $\tilde{S}$ 系の原点は

$$\frac{d\boldsymbol{x}}{dt} = \boldsymbol{v}$$

で動いている.

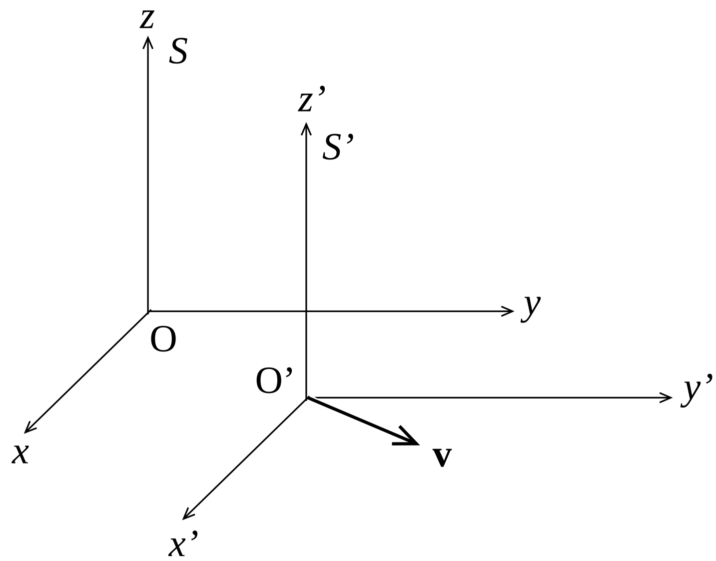



Figure 8: $S$ 系と $S'$ 系

#### 1.3.3　時計の遅れ（(Lorenzt) Time Dilation）

$\tilde{S}$ 系で静止している時計を $S$ 系で**見る.** $\tilde{S}$ 系で静止しているので

$$\Delta\tilde{\boldsymbol{x}} = 0, \quad \Delta t = \gamma\Delta\tilde{t}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\left(\frac{\boldsymbol{v}}{c}\right)^2}} > 1$$

よって $\tilde{S}$ 系で 1 秒は $S$ 系では $\gamma$ 秒 $\Rightarrow$ $\tilde{S}$ 系の時計は $S$ 系ではゆっくり進んでいるように見える.

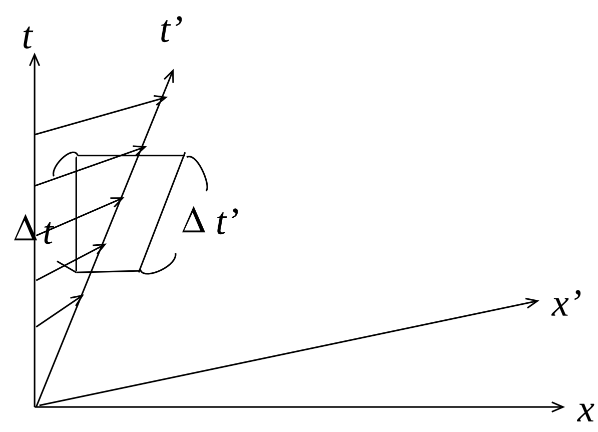



Figure 9: 時間の遅れ

### 1.3.4　ローレンツ収縮 (Lorentz Contraction of Moving Bodies) その１

$\tilde{S}$ 系で静止している物指を $S$ 系で計る.

$$\Delta t = 0, \quad (S\ 系で同時に計る), \quad \Delta\tilde{\boldsymbol{x}} = \Delta\mathrm{x} + (\gamma - 1)(\boldsymbol{n}\cdot\Delta\boldsymbol{x}\boldsymbol{n}$$

$\boldsymbol{n}_\parallel$ 成分

$$\Delta\tilde{x}_\parallel = \Delta\tilde{\boldsymbol{x}}\cdot\boldsymbol{n} = \gamma\Delta\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{n} = \gamma\Delta x_\parallel \tag{36}$$

$\boldsymbol{n}_\perp$ 成分

$$\Delta\tilde{x}_\perp = \Delta x_\perp \tag{37}$$

したがって

- 運動方向成分：$S$ 系で 1 m → $\tilde{S}$ 系で $\gamma$ m.
- 垂直方向成分：$S$ 系で 1 m → $\tilde{S}$ 系で 1 m.

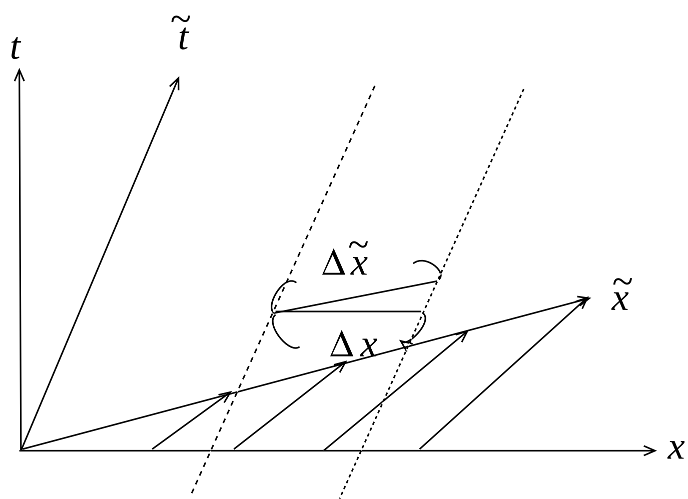



Figure 10: Lorentz 収縮

$\tilde{S}$ 系の物指は $S$ 系では縮んで見える.

### 1.3.5　ロ＝レンツ変換その２

$S$ 系の静止した 1 点で物指の経過時間差を計り速度 $\boldsymbol{v}$ をかける.

$$L = -\boldsymbol{v}\Delta t \tag{38}$$

$-$（マイナス）符号は時間差と物指の向きが逆なため.

ローレンツ変換の式

$$\delta\tilde{\boldsymbol{x}} = \Delta\boldsymbol{x} - \gamma\boldsymbol{v}\Delta t + (\gamma - 1)(\boldsymbol{n}\cdot\Delta\boldsymbol{x})\boldsymbol{n} \tag{39}$$

において $\Delta\boldsymbol{x} = 0$ （$S$ 系で静止）より，

$$\Delta\tilde{\boldsymbol{x}} = -\gamma\boldsymbol{v}\Delta t = \gamma L \tag{40}$$

よって

$$\tilde{L} = |\Delta\tilde{\boldsymbol{x}}|$$

とすると

$$\tilde{L} = \gamma L, \quad \text{or} \quad L = \frac{1}{\gamma}\tilde{L} \tag{41}$$

よって $\tilde{S}$ 系で 1 m の物指は $S$ 系では $\frac{1}{\gamma}$ 倍に縮んで見える.

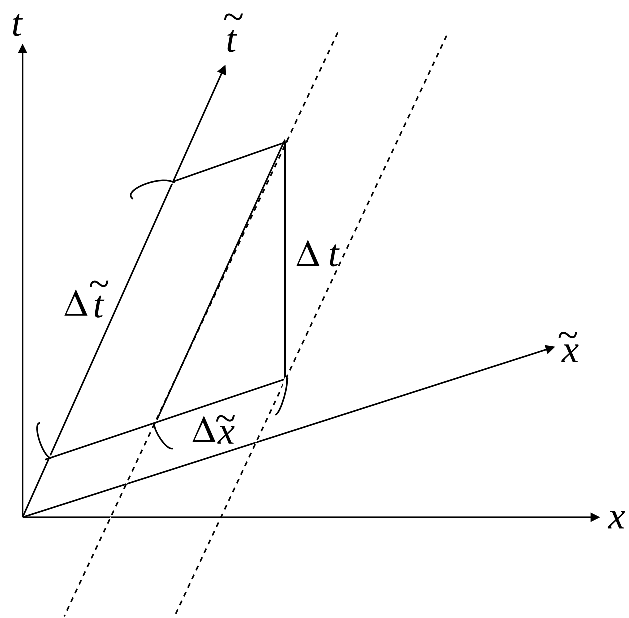



Figure 11: Lorentz 収縮

#### 1.3.6 ローレンツ変換その３

$S$ 系で同時に物指の両端を計りその差から長さを求める.

$$L = \delta x \tag{42}$$

逆ローレンツ変換の式から

$$\Delta x = \Delta\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{n} = \left[\Delta\tilde{\boldsymbol{x}} + \gamma\boldsymbol{v}\Delta\tilde{t} + (\boldsymbol{n}\cdot\Delta\tilde{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{n}\right]\cdot\boldsymbol{n} = \gamma\Delta\tilde{x}\cdot\boldsymbol{n} = \gamma\Delta\tilde{x} \tag{43}$$

$$\Delta t = \gamma\left(\Delta\tilde{t} + \frac{\boldsymbol{v}\cdot\Delta\boldsymbol{x}}{c^2}\right) = \gamma\frac{v\Delta\tilde{x}}{c^2} \tag{44}$$

これより

$$\begin{aligned}\delta x &= \Delta x - v\Delta t = \gamma\Delta\tilde{x} - \gamma\frac{v^2}{c^2}\Delta\tilde{x} = \gamma\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\Delta\tilde{x} = \frac{\Delta\tilde{x}}{\gamma} \\ \tilde{L} &= \frac{L}{\gamma}\end{aligned} \tag{45}$$

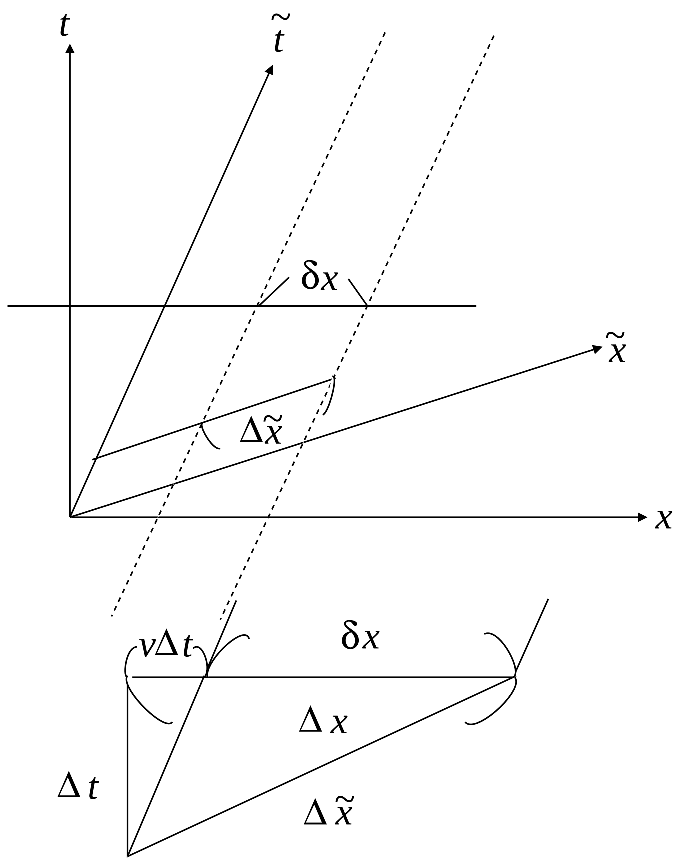



Figure 12: Lorentz 収縮

### 1.3.7　光行差

光の方向

$$\boldsymbol{k} = \frac{\Delta\boldsymbol{x}}{c\Delta t} \tag{46}$$

の変換 $(\boldsymbol{k} \to \boldsymbol{k}')$.

$$k^{i'} = \frac{\Delta x^{i'}}{\Delta t'} = \frac{L_0^{j'}\Delta x^0 + L_i^{j'}\Delta x^i}{L_0^{0'}\Delta x^0 + L_i^{0'}\Delta x^i} = \frac{L_0^{i'} + L_i^{i'}k^i}{L_0^{0'} + L_i^{0'}k^i}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{-\gamma\frac{\boldsymbol{v}}{c}+\boldsymbol{k}+(\gamma-1)(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{k})\boldsymbol{n}}{\gamma\left(1-\frac{\boldsymbol{v}c}{\cdot}\boldsymbol{k}\right)}, \quad \left(\boldsymbol{n}=\frac{\boldsymbol{v}}{v}\right)\\
\boldsymbol{k}' &= \frac{\frac{\boldsymbol{k}}{\gamma}-\frac{\boldsymbol{v}}{c}+\frac{\gamma-1}{\gamma}(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{k})\boldsymbol{n}}{1-\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{k}}{c}}\\
&= \left(1+\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{k}}{c}\right)\left\{\left[1-\frac{1}{2}\left(\frac{\boldsymbol{v}}{c}\right)^2\right]-\frac{\boldsymbol{v}}{c}+\frac{1}{2}\left(\frac{\boldsymbol{v}}{c}\right)^2(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{k})\boldsymbol{n}\right\}\boldsymbol{k}+\cdots,\\
&\qquad \left(\frac{\boldsymbol{v}}{c}\ll 1\right)\\
&= \boldsymbol{k}-\frac{v}{c}+\left(\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{k}}{c}\right)\boldsymbol{k}-\frac{1}{2}\left(\frac{\boldsymbol{v}}{c}\right)^2\{\boldsymbol{k}-(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{k})\boldsymbol{n}\}+O\left(\left(\frac{\boldsymbol{v}}{c}\right)^3\right),\\
&\qquad \left(\frac{1}{\gamma}\sim 1-\frac{1}{2}\left(\frac{\boldsymbol{v}}{c}\right)^2, \quad \gamma-1\sim\frac{1}{2}\left(\frac{\boldsymbol{v}}{c}\right)^2\right)\\
&\quad \boldsymbol{k}-\frac{v}{c}[\boldsymbol{n}-(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{n})\boldsymbol{k}]-\frac{1}{2}[\boldsymbol{k}-(\boldsymbol{n}\cdot k)\boldsymbol{n}] \qquad (47)
\end{aligned}
$$

よって

$$k'_{\parallel} = k_{\parallel}-\frac{1}{c}(1-k_{\parallel}^2)+O\left(\left(\frac{v}{c}\right)^3\right) \qquad (48)$$

$$k'_{\perp} = k_{\perp}+\frac{1}{c}k_{\parallel}k_{\perp}-\frac{1}{2}\left(\frac{v}{c}\right)^2 k_{\perp}+O\left(\left(\frac{v}{c}\right)^3\right) \qquad (49)$$

光行差の式で $\boldsymbol{k}'=\frac{\boldsymbol{u}'}{c}$, $\boldsymbol{k}=\frac{\boldsymbol{u}}{c}$ とおくと，速度の合成則

$$\boldsymbol{u}'=\frac{\boldsymbol{u}\gamma-\frac{\boldsymbol{v}}{c}+\frac{\gamma-1}{\gamma}(\boldsymbol{n}\cdot\left(\frac{\boldsymbol{u}}{c}\right))\boldsymbol{n}}{1-\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{c^2}} \qquad (50)$$

を得る.

### 1.3.8 速度の合成則

$\boldsymbol{u}=\frac{\Delta\boldsymbol{x}}{\Delta t}$ の変換.

$$u^{j'} = c\frac{\Delta x^{j'}}{\Delta x^{0'}}=c\frac{L_0^{j'}\Delta x^0+L_i^{j'}\Delta x^i}{L_0^{0'}\Delta x^0+L_i^{0'}\Delta x^i}=c\frac{cL_0^{j'}+L_i^{j'}u^i}{cL_0^{0'}+L_i^{0'}u^i}$$

よって

$$
\begin{aligned}
\frac{\boldsymbol{u}'}{c} &= \frac{-\gamma\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}+(\gamma-1)(\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{n}}{c\gamma-\gamma\frac{\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}}{c}}\\
\boldsymbol{u}' &= \frac{\boldsymbol{u}-\gamma\boldsymbol{v}+(\gamma-1)\frac{(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{u})\boldsymbol{v}}{v^2}}{\gamma\left(1-\frac{\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}}{c^2}\right)} \qquad (51)
\end{aligned}
$$

特に $\boldsymbol{u}\perp\boldsymbol{v}$ の時,

$$\boldsymbol{u}'=\frac{\boldsymbol{u}}{\gamma}-\boldsymbol{v} \qquad (52)$$

次に $\boldsymbol{u}\|\boldsymbol{v}$ の時，

$$u' = \frac{u-v}{1-\frac{uv}{c^2}} \tag{53}$$

成分に分けると，

$$u'_\| = \frac{u_\| - v}{1-\frac{u_\| v}{c^2}}, \quad u_\perp = \frac{u_\perp}{\gamma\left(1-\frac{u_\| v}{c^2}\right)} \tag{54}$$

これを展開すると[2]，

$$u_\| = \left(1-\frac{1}{2}\frac{u_\| v}{c^2}\right)(u_\| - v) = u_\| - v - \frac{1}{2}\frac{u_\| v}{c^2}(u_\| - v) \tag{55}$$

$$u_\perp = \left[1+\frac{1}{c^2}\left(-\frac{v^2}{2}+u_\perp v\right)\right] y_\perp = u_\perp + \frac{1}{c^2}\left(-\frac{v^2}{2}+u_\perp v\right) u_\perp \tag{56}$$

となる．

### 1.3.9 光行差

$\boldsymbol{k} = \frac{\Delta \boldsymbol{x}}{c\Delta t}, (|\boldsymbol{k}|^2 = 1)$ の変換．$\boldsymbol{k} = c\boldsymbol{u}$ とおいて速度の変換式に代入すると，

$$\boldsymbol{k}' = \frac{c\boldsymbol{k} - \gamma \boldsymbol{v} + (\gamma - 1)\frac{(\boldsymbol{v}\cdot c\boldsymbol{k})\boldsymbol{v}}{c^2}}{\gamma\left(1-\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{k}}{c}\right)}$$

よって，

$$\boldsymbol{k}' = \frac{\boldsymbol{k} - \gamma \frac{\boldsymbol{v}}{c} + (\gamma - 1)\frac{(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{k})\boldsymbol{v}}{c^2}}{\gamma\left(1-\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{k}}{c^2}\right)} \tag{57}$$

特に，

$$\begin{cases} \boldsymbol{k}\perp\boldsymbol{v}\text{の時} \quad \boldsymbol{k}' = \frac{\boldsymbol{k}}{\gamma} - \frac{\boldsymbol{v}}{c} \\ \boldsymbol{k}\|\boldsymbol{v}\text{の時} \quad \boldsymbol{k}' = \boldsymbol{k} \end{cases} \tag{58}$$

成分に分けると，

$$k'_\| = \frac{k_\| - \frac{v}{c}}{1-\frac{k_\| v}{c}}, \quad \boldsymbol{k}'_\perp = \frac{\boldsymbol{k}_\perp}{\gamma\left(1-\frac{k_\perp v}{c}\right)} \tag{59}$$

展開すると，

$$k' \cong \left[1+\frac{k_\| v}{c}+\left(\frac{k_\| v}{c}\right)^2\right]\left(k_\| - \frac{v}{c}\right) = k_\| - \frac{v}{c}\left(1-k_\|^2\right) - \left(\frac{v}{c}\right)^2 k_\|(1-k_\|^2) + \cdots \tag{60}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{k}' &\cong \left(1-\frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}\right)\left(1+\frac{k_\| v}{c}+\left(\frac{k_\| v}{c}+\cdots\right)\right)\boldsymbol{k}_\perp \\ &= \boldsymbol{k}_\perp + \frac{v}{c}k_\|\boldsymbol{k}_\perp + \left(\frac{v}{c}\right)^2\left(k_\|^2 - \frac{1}{2}\right)\boldsymbol{k}_\perp + \cdot \end{aligned} \tag{61}$$

---

[2] 次の展開式を用いた：

$$\frac{1}{\gamma} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \cong 1 + \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}$$

一般には，

$$\boldsymbol{k}' = \boldsymbol{k} - \frac{1}{c}\left[\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{k})\boldsymbol{k}\right] + \frac{1}{c^2}\left\{\left[(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{k})^2 - \frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2}\right]\boldsymbol{k} - \frac{1}{c}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{k})\boldsymbol{v}\right\} + \cdots \tag{62}$$

となる．

### 1.3.10　光行差（ニュートン的考え方）

$$\boldsymbol{k}' = \frac{\boldsymbol{k} - \frac{\boldsymbol{v}}{c}}{\left|\boldsymbol{k} - \frac{\boldsymbol{v}}{c}\right|} \tag{63}$$

$$\Delta\theta' = \theta' - \theta$$

とおいて，

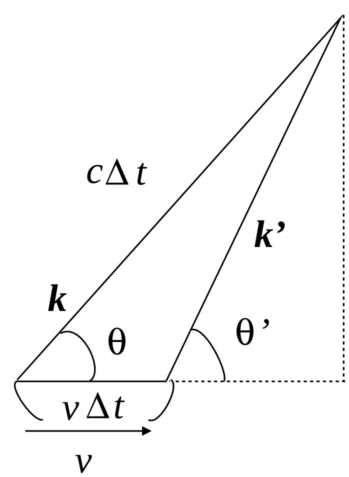



Figure 13: Newton 的光行差

$$\tan\theta' = \frac{\sin\theta}{\cos\theta - \frac{v}{c}}, \quad \text{or} \quad \tan\Delta\theta' = \frac{\frac{v}{c}\sin\theta}{1 - \frac{v}{c}\cos\theta} \tag{64}$$

と求められる[3]． $\boldsymbol{k}\perp\boldsymbol{v}(\theta = 90\text{deg.})$ の時[4]，

$$\Delta\theta' = \tan^{-1}\frac{v}{c} \tag{65}$$

---

[3] 加法定理より，

$$\tan\Delta\theta' = \frac{\tan\theta' - \tan\theta}{1 + \tan\theta'\tan\theta} = \frac{\frac{\sin\theta}{\cos\theta - \frac{v}{c}} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}}{1 + \frac{\sin\theta}{\cos\theta - \frac{v}{c}}\frac{\sin\theta}{\cos\theta}} = \frac{\sin theta\cos\theta - \sin\theta\cos\theta + \frac{v}{c}\sin\theta}{\cos^2\theta - \frac{v}{c}\cos\theta + \sin^2\theta} = \frac{\frac{v}{c}\cos\theta}{1 - \frac{v}{c}\sin\theta}$$

を得る．

[4] $\left|\boldsymbol{k} - \frac{\boldsymbol{v}}{c}\right| = \sqrt{\boldsymbol{k}^2 + \frac{v^2}{c^2}} = \sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}}$

$\boldsymbol{k}\|\boldsymbol{v}$ の時,

$$\boldsymbol{k}' = \boldsymbol{k} \tag{66}$$

一般に,

$$\left|\boldsymbol{k} - \frac{\boldsymbol{v}}{c}\right| = \sqrt{1 - 2\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}}{c} + \frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2}}$$

であり，展開公式,

$$\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}} = 1 + \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{3}{8}\varepsilon^2 + \cdots$$

を用いて,

$$\frac{1}{\left|\boldsymbol{k} - \frac{\boldsymbol{v}}{c}\right|} = 1 + \frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}}{c} + \frac{3}{2}\left(\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}}{c}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\boldsymbol{v}}{c}\right)^2 + \cdots$$

と展開すると，$\boldsymbol{k}$ は,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{k}' &= \left(\boldsymbol{k} - \frac{\boldsymbol{v}}{c}\right)\left[1 + \frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}}{c} + \frac{3}{2}\left(\frac{\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{v}}{c}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\boldsymbol{v}}{c}\right)^2 + \cdots\right] \\ &= \boldsymbol{k} - \frac{1}{c}\left[\boldsymbol{v} - (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{k})\boldsymbol{k}\right] + \frac{1}{c^2}\left\{\left[\frac{3}{2}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{k})^2 - \frac{\boldsymbol{v}^2}{2}\right]\boldsymbol{k} - (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{k})\boldsymbol{v}\right\} + \cdots\end{aligned} \tag{67}$$

となる[5].

### 1.3.11 Doppler Effect

波数 $\omega\Delta t$ は別の不変量.

$$c\Delta t' = L_0^{o\prime} c\Delta t + L_i^{0\prime}\Delta x^i = \gamma c\Delta t - \gamma\frac{\boldsymbol{v}\cdot\Delta\boldsymbol{x}}{c} \tag{68}$$

ここで $\frac{\Delta\boldsymbol{x}}{c\Delta t} = \boldsymbol{k}$ であるから，結局,

$$\Delta t' = \gamma\Delta t\left(1 - \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{k}}{c}\right) \tag{69}$$

波数は保存量

$$\omega'\Delta t' = \omega\Delta t$$

であるから

$$\omega = \omega'\gamma\left(1 - \frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{k}}{c}\right) \tag{70}$$

$$\begin{cases} \omega' & \text{光源：静止系での振動数} \\ \omega & \text{観測者：静止系での振動数（観測振動数）} \\ \boldsymbol{v} & \text{光源の観測者からみた速度} \\ \boldsymbol{k} & \text{観測者から見た光の方向ベクトル} \end{cases}$$

---

[5] ニュートン的な光行差と特殊相対論における光行差の差は,

$$\boldsymbol{k}_N - \boldsymbol{k}_{SR} \cong \frac{1}{2c^2}\left[(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{k})^2\boldsymbol{k} - (\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{k})\boldsymbol{v}\right] + \cdots$$

となる.

展開すると，

$$\omega = \omega'\left[1-\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{k}}{c}+\frac{1}{2}\left(\frac{\boldsymbol{v}}{c}\right)^2+\cdots\right] \tag{71}$$

$$\frac{\omega-\omega'}{\omega'} = -\frac{bdv\cdot\boldsymbol{k}}{c}+\frac{1}{2}\left(\frac{\boldsymbol{v}}{c}\right)^2+\cdots \tag{72}$$

となる[6]． $\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{k}>0$(光源は遠ざかる) より $\omega-\omega'<0 \Longrightarrow$ Red Shift（赤方偏移）.

### 1.3.12　固有時

固有時 $\tau$ (Proper Time) $\cdots$ 運動物体と共に動く時計.

$$(\Delta s)^2 = -c^2(\Delta\tau)^2 \tag{73}$$

$$(\Delta\tau)^2 = (\Delta t)-\frac{1}{c^2}(\Delta\boldsymbol{x})^2=(\Delta t)^2\left[1-\left(\frac{\Delta\boldsymbol{x}}{\Delta t}\right)^2\right], \quad \boldsymbol{v}\equiv\frac{\Delta\boldsymbol{x}}{\Delta t} \tag{74}$$

$$\frac{\Delta\tau}{\Delta t} = \sqrt{1-\left(\frac{\boldsymbol{v}}{c}\right)^2}=\frac{1}{\gamma}\leq 1, \quad (\Delta\tau=\gamma\Delta t) \tag{75}$$

### 1.3.13　4 元速度 (4-velocity)

速度 $\boldsymbol{v}=\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}$ の 4 次元化.

$$u^\mu \equiv \frac{du^\mu}{d\tau}, \quad \tau \quad \text{（固有時）} \tag{76}$$

$$u^0 = \frac{dx^0}{d\tau}=c\frac{dt}{d\tau}=c\gamma \tag{77}$$

$$u^j = \boldsymbol{u}=\frac{dx^j}{d\tau}=\frac{d\boldsymbol{x}}{d\tau}=\frac{dt}{d\tau}\frac{d\boldsymbol{x}}{dt}=\gamma\boldsymbol{v} \tag{78}$$

$$\boldsymbol{v} \quad \text{3-velocity}$$

4 元速度の絶対値を求めると，

$$||u^\mu|| = \sqrt{-\eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu}=\sqrt{c^c\gamma^2-\gamma^2\boldsymbol{v}^2}=c \tag{79}$$

となるから，この拘束条件より独立な成分は 3 成分となる.

### 1.3.14　4 元運動量

$$\left.\begin{array}{c} p^\mu = mu^\mu, \quad m \text{ 固有質量} \\ ||p^\mu|| = m||u^\mu|| = mc \\ p^0 = mu^0 = mc\gamma = \frac{E}{c} \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} ||p^\mu||^2 = m^2c^2 = m^2||u^\mu||^2 = m^2\gamma^2c^2 - m^2\gamma^2\boldsymbol{v}^2 = \frac{E^2}{c^2}-\boldsymbol{p}^2 \\ E^2 = m^2c^2+\boldsymbol{p}^2, \quad \boldsymbol{p}=m\boldsymbol{u}=m\gamma\boldsymbol{v} \end{array}\right. \tag{80}$$

[6] ここで $\gamma$ の展開式，

$$\gamma\sim 1+\frac{1}{2}\left(\frac{\boldsymbol{v}}{c}\right)^2+O\left(\left(\frac{\boldsymbol{v}}{c}\right)^4\right)$$

を用いた.

$$E = m\gamma c^2 = mc^2 \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2}}} \approx mc^2\left(1+\frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2}\right) = mc^2 + \frac{1}{2}m\boldsymbol{v}^2 = E_0 + T \tag{81}$$

### 1.3.15　運動方程式

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = f^\mu, \quad f^\mu \ \ 4\text{元力，4-force} \tag{82}$$

質点の時は，

$$\frac{dp^\mu}{d\tau} = m\frac{du^\mu}{d\tau} = f^\mu \tag{83}$$

$$a^\mu = \frac{f^\mu}{m}$$

とおいて，

$$\boldsymbol{v}\cdot\frac{d\boldsymbol{v}}{=}\frac{c}{\gamma^4}a^0, \quad \gamma^2\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} + \frac{a^0}{c} = a^j$$

より，

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \frac{1}{\gamma^2}\left(a^j - \frac{a^0}{c}\boldsymbol{v}\right) \tag{84}$$

よって，座標加速度 $\boldsymbol{\alpha} \equiv \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}$ は座標力 $a^j$ とは平行ではない．

### 1.3.16　4 元加速度

$$a^\mu = \frac{du^\mu}{d\tau} \tag{85}$$

$$a^0 = \frac{du^0}{d\tau} = c\frac{d\gamma}{d\tau} = c\frac{dt}{d\tau}\frac{d\gamma}{dt} = c\gamma\frac{d\gamma}{dt} = \frac{c}{2}\frac{d\gamma^2}{dt} = \frac{c}{2}\left[-\frac{-2\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a}}{c^2}}{\left(1-\frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2}\right)}\right] = \gamma^4\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a}}{c} \tag{86}$$

$$\boldsymbol{a} \equiv \frac{d\boldsymbol{v}}{dt}, \quad \text{座標加速度}$$

$$a^j = \frac{du^j}{d\tau} = \frac{d(\gamma\boldsymbol{v})}{d\tau} = \frac{d\gamma}{d\tau}\boldsymbol{v} + \gamma\frac{d\boldsymbol{v}}{d\tau} = \frac{a^0}{c}\boldsymbol{v} + \gamma^2\frac{\boldsymbol{v}}{dt} = \gamma^4\frac{\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a}}{c^2}\boldsymbol{v} + \gamma^2\boldsymbol{a} \tag{87}$$

$$(a^j \gg a^0, \quad a^\mu\text{:Space-like})$$

実は，

$$||u^\mu|| = c = \text{Const}$$

の関係より，

$$c^2 = -\eta_{\mu\nu}u^\mu u^\nu \quad \rightarrow \quad \frac{dc^2}{d\tau} = 0 = -\eta_{\mu\nu}a^\mu u^\nu - \eta_{\mu\nu}u^\mu a^\nu = -2\eta_{\mu\nu}a^\mu u^\nu \quad \Rightarrow \quad 0 = a^\mu u_\mu \tag{88}$$

したがって $a^\mu \perp u^\mu$ の拘束条件となるから，独立な成分は 3 成分となる．
この後 ...

1. 電磁気学 → 相対論的電磁気学
2. 質点 → 有限体
   (a) 剛体 → ×（困難）
   (b) 連続体
      i. 流体（液体・気体）→ 相対論的流体力学
      ii. 一般連続体 → ？
3. 万有引力 → ？

疑問

特殊相対論 → **慣性系間**（だから特殊）

$\Longrightarrow$ 加速度運動は特殊相対論では扱えない？

（例）Thomas Precession

自転する粒子（スピン）

$$\boldsymbol{\Omega} \cong -\frac{1}{2c^2}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{a}, \quad (a:\text{電磁気力による加速度}) \tag{89}$$

逐次 Lorentz 変換 → 正当？

# 2　一般相対性理論概要

## 2.1　アインシュタインの一般相対性理論

1915 年にアインシュタインにより提唱（特殊は 1905 年）

### 2.1.1　指導原理

1. **一般相対性原理：**すべての物理法則は一般座標変換に対して不変.
2. **等価原理：**重力は力 (Force) ではない.
3. **対応原理**
   - $U \to 0$ 特殊相対論に一致.
   - $c \to \infty$ ニュートン力学に一致.

一般相対論的天体力学とは歪んだ（曲がった）時空中を自由運動（重力≠力）を議論する学問である[7].

### 2.1.2　曲がった時空の導入

不変量

1. 線素

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu, \quad 2\text{ 次形式 (2-form)} \\ & \phantom{=} g_{\mu\nu}\text{：計量テンソル，対称 2 階共変テンソル} \end{aligned} \tag{90}$$

2. 変位

$$dx^\mu\text{：(反変) ベクトル}, \qquad \partial x^\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}\text{：(共変) 偏微分ベクトル} \tag{91}$$

3. アフィンパラメータ $\lambda \cdots$ 世界線に固有
4. アフィン速度 $\frac{dx^\mu}{d\lambda}$
5. 4 元速度

$$u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad \lambda \to \tau \tag{92}$$

時間的 (Timelike) 世界線：$cdt > dx^j$

[7] ポアンカレ：「天体力学とは万有引力だけが働いている運動を議論する学問.」

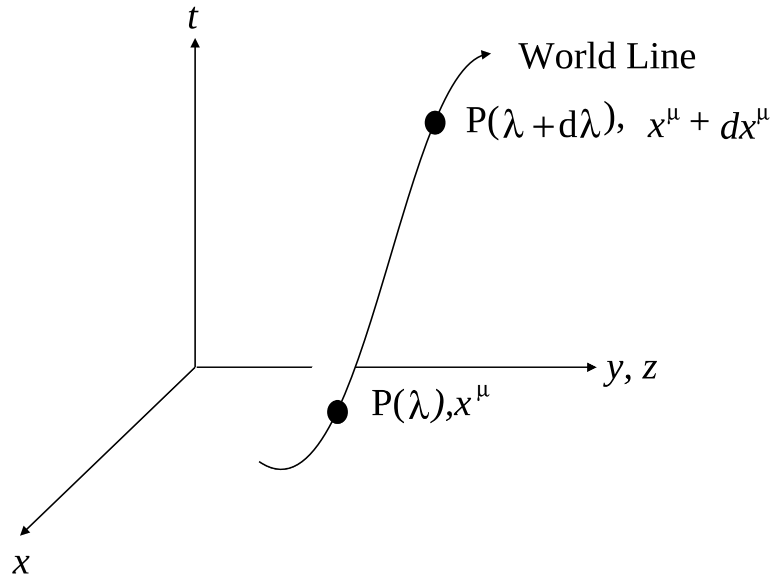



Figure 14: 世界線

6. 4 元方向余弦

$$\omega^\mu = \frac{dx^\mu}{ds}, \quad \lambda \to s \tag{93}$$

   空間的 (Spacelike) 世界線：$cdt < dx^j$

7. ヌル (Null) 世界線
   $\lambda$ はそのまま，長さ 0 の世界線 $cdt \sim dx^\mu$

#### 2.1.3 なぜ座標系が必要か？

方程式は共変 (Covariant) ：物理法則はどの座標系を取っても不変 →単一粒子ならどの座標系でもよい.

しかし，

| | | | |
|---|---|---|---|
| 多体系 | 固有時 → 世界線に固有 | | 独立時間刻みの様になる |
| $1 \cdots i \cdots N$ | $\tau_1 \cdots \tau_i \cdots \tau_N$ → N 個存在 | $\Rightarrow$ | ITS 法 |

$$\Downarrow$$

多時間理論は複雑

よって一つの物指 (guage)/座標系 (Coordinate system) を導入して全ての現象をこれで記述する．

$$\left.\begin{array}{l}\text{共変 4 次元方程式 } i=i \\ \cdots \\ \text{共変 4 次元方程式 } i=N\end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad \text{単一座標系（３次元）} \tag{94}$$

### 2.1.4　絶対微分

4 加速度 $\frac{d}{d\lambda}\left(\frac{dx^\mu}{d\lambda}\right)$ は？⇒ これは反変ベクトルではない．

実際，(一般) 座標変換，

$$x^{\alpha\prime} = x^{\alpha'}(x^\mu), \quad x^\mu \to x^{\alpha'}$$

において，

$$x^{\alpha'} = E^{\alpha'}_\mu x^\mu, \quad E^{\alpha'}_\mu = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\mu}, \quad \text{変換のヤコビヤン} \tag{95}$$

この時 $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$ の全微分 $du^\mu$ の変換は，

$$u^{\alpha'} = E^{\alpha'}_\mu u^\mu$$

を微分して，

$$du^{\alpha'} = (dE^{\alpha'}_\mu) + E^{\alpha'}_\mu du^\mu$$

よって，

$$du^{\alpha'} \neq E^{\alpha'}_\mu du^\mu \tag{96}$$

である．

テンソルの性質を保存する微分は何か？ → 絶対微分 $D$

$$D = d - \delta, \quad \delta : \text{平行移動による Path に依存する差} \tag{97}$$

曲がった Path に沿って平行移動すると $\delta \neq 0$．一般に $\delta u^\mu$ は

$$\begin{aligned} \delta u^\mu &\propto dx^\mu, \quad \text{変位が小} \to \text{平行移動も小} \\ &\propto u^\mu \quad \text{元の量が小} \to \text{平行移動も小} \\ \delta u^\mu(x^\rho) &= C^\mu_{\nu\lambda}(x^\rho) u^\mu dx^\nu \\ & \quad C^\mu_{\nu\lambda} : \text{接続係数 (Connection Coefficient)} \end{aligned} \tag{98}$$

一般相対論では伝統的に，

$$\Gamma^\mu_{\nu\lambda} = -C^\mu_{\nu\lambda} \tag{99}$$

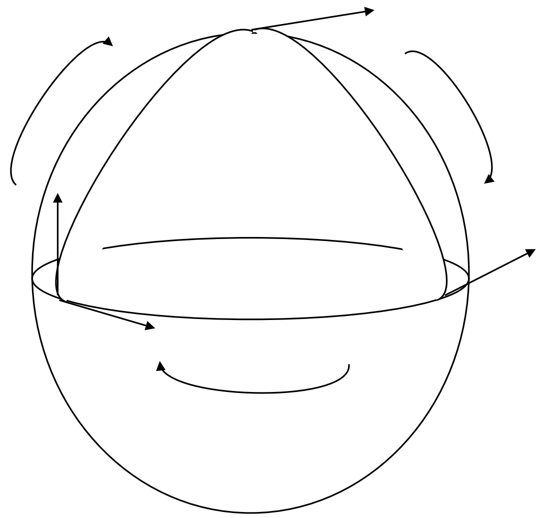


Figure 15: 曲がった時空での平行移動

と置きクリストッフェルの記号 (Christoffel's symbol) と呼ぶ．クリストッフェル記号はテンソルではない．したがって絶対微分は

$$Du^\mu = du^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} u^\nu dx^\lambda \tag{100}$$

となる．

公式

$$DA = dA, \quad A : \text{スカラ関数} \tag{101}$$

$$DB^\mu = dB^\mu + \Gamma^\mu_{\nu\lambda} B^\nu dx^\lambda \tag{102}$$

$$DC_\mu = dC_\mu - \Gamma^\nu_{\mu\lambda} C_\nu dx^\lambda \tag{103}$$

$DB^\mu$が成り立つとして $DA$ に $A = B^\mu C_\mu$を代入

$$DE^{\mu\nu} = dE^{\mu\nu} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} E^{\alpha\nu} dx^\beta + \Gamma^\nu_{\alpha\beta} E^{\mu\beta} \tag{104}$$

$$DF^\mu_\nu = dF^\mu_\nu + \Gamma^{mu}_{\alpha\beta} E^\alpha_\nu dx^\beta - \Gamma^\alpha_{\nu\beta} E^\mu_\alpha dx^\beta \tag{105}$$

#### 2.1.5　アフィン微分

$$\frac{D}{D\lambda} \quad D : \text{絶対微分}$$

アフィン加速度

$$\frac{D}{D\lambda}\left(\frac{dx^\mu}{d\lambda}\right)$$

4 元加速度

$$\frac{D}{D\tau}\left(\frac{dx^\mu}{d\tau}\right) = \frac{Du^\mu}{d\tau}$$

共変微分

$$\begin{aligned} DB^{\mu} &= dB^{\mu} + \Gamma^{\mu}_{\mu\lambda} B^{\nu} dx^{\lambda} \\ &= \left( \frac{dB^{\mu}}{dx^{\lambda}} + \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} B^{\nu} \right) dx^{\lambda} \\ &= B^{\mu}_{;\lambda} dx^{\lambda} \end{aligned} \tag{106}$$

ここで $B^{\mu}_{;\lambda}$ を**共変微分**と呼ぶ[8]．一般に

$$D = dx^{\mu} \nabla_{\mu}, \quad \nabla_{\mu} = \frac{D}{\partial x^{\mu}}$$

より，

$$\frac{D}{d\tau} = \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \nabla_{\mu} = u^{\mu} \nabla \mu = (\nabla_u) \tag{107}$$

### 2.1.6 $g_{\mu\nu}, \delta^{\mu}_{\nu}, g^{\mu\nu}, (\eta_{\mu\nu})$

線素

$$(ds)^2 = g_{\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = dx^{\mu} dx_{\mu}$$

$g_{\mu\nu}$ は座標に依存した表現．添字の上げ下げを $g_{\mu\nu}, g^{\mu\nu}$ を使って行う．

$$A^{\mu}_{\nu} = g_{\nu\rho} A^{\mu\rho} \quad \text{など}$$

$$\delta^{\mu}_{\nu} = \begin{cases} 1 & (\mu = \nu) \\ 0 & (\mu \neq \nu) \end{cases}$$

とすると

$$g^{\mu\nu} g_{\nu\lambda} = \delta^{\mu}_{\lambda} \tag{108}$$

となる．ここで $g^{\mu\nu}$ は共変逆計量テンソル．

### 2.1.7 $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}$

要請

1. 添字の上げ下げ $\leftrightarrow$ $D$ (絶対微分)　可換
2. 積の微分法則を満たす．

$$D(A^{\mu} B_{\nu}) = (DA^{\mu}) B_{\nu} + A^{\mu} (DB_{\nu}) \quad \text{等}$$

[8] ちなみに普通の偏微分は”,”(カンマ) を使って

$$B^{\mu}_{,\lambda} = \frac{\partial B^{\mu}}{\partial x^{\lambda}}$$

と表す．

これから直ちに

$$Dg^{\mu\nu} = D\delta^{\mu}_{\nu} = Dg_{\mu\nu}(= D\eta_{\mu\nu}) = 0 \tag{109}$$

すなわち $g_{\mu\nu}, g^{\mu\nu}$ **は $D$ に対して定数と同じように振舞う．**

この要請から $g_{\mu\nu}$ の絶対微分を計算すると，

$$\begin{aligned} 0 = Dg_{\mu\nu} &= dg_{\mu\nu} - (\Gamma^{\lambda}_{\mu\rho} g_{\nu\lambda} + \Gamma^{\lambda}_{\nu\rho} g_{\mu\lambda}) dx^{\rho} \\ \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{rho}} &= \Gamma_{\mu\rho} g_{\nu\lambda} + \Gamma^{\lambda}_{\nu\rho} g_{\mu\lambda} \end{aligned} \tag{110}$$

$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}$ は下つき添字に対して対称，

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu} = \Gamma^{\lambda}_{\nu\mu} \tag{111}$$

$\phi$ をスカラー場だとすると，

$$\begin{aligned} \frac{D}{\partial x^{\lambda}} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x^{\mu}} \right) &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^{\lambda} \partial x^{\mu}} - \Gamma^{\nu} \mu\lambda \frac{\partial \phi}{\partial x^{\nu}} \\ \frac{D}{\partial x^{\mu}} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x^{\lambda}} \right) &= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^{\mu} \partial x^{\lambda}} - \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} \frac{\partial \phi}{\partial x^{\nu}} \\ \frac{D}{\partial x^{\lambda}} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x^{\mu}} \right) - \frac{D}{\partial x^{\mu}} \left( \frac{\partial \phi}{\partial x^{\lambda}} \right) &= \left( \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} - \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} \right) \frac{\partial \phi}{\partial x^{\nu}} \end{aligned} \tag{112}$$

直交座標系で左辺=0 ($D \to \partial$)．よって，

$$0 = \left( \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} - \Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} \right) \frac{\partial \phi}{\partial x^{\nu}} \tag{113}$$

これは座標変換しても $0 \to 0$，一方 $\phi$ は任意より結局，

$$\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu} = \Gamma^{\nu}_{\mu\lambda} \tag{114}$$

となる．

### 2.1.8 $\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}$ その２

$$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} = \Gamma^{\lambda}_{\mu\rho} g_{\lambda\nu} + \Gamma^{\lambda}_{\nu\rho} g_{\lambda\mu}$$

を用いて $(\mu, \nu, \rho) + (\nu, \rho, \mu) - (\rho, \mu, \nu)$ を計算すると，

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} + \frac{\partial g_{\nu\rho}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^{\nu}} &= 2\Gamma^{\lambda}_{\mu\rho} g_{\lambda\nu} \equiv 2\Gamma_{\nu,\mu\rho} \\ \Gamma^{\lambda}_{\mu\rho} &= \frac{1}{2} g^{\lambda\kappa} \left( \frac{\partial g_{\mu\kappa}}{\partial x^{\rho}} + \frac{\partial g_{\kappa\rho}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial g_{\rho\mu}}{\partial x^{\kappa}} \right) \end{aligned}$$

添字を整理して描き直せば，

$$\begin{aligned} \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} &= \frac{1}{2} g^{\mu\kappa} \left( \frac{\partial g_{\nu\kappa}}{\partial x^{\lambda}} + \frac{\partial g_{\kappa\lambda}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\lambda\nu}}{\partial x^{\kappa}} \right) \\ &= \frac{1}{2} g^{\mu\kappa} \left( g_{\nu\kappa,\lambda} + g_{\kappa\lambda,\nu} - g_{\lambda\nu,\kappa} \right) \end{aligned} \tag{115}$$

### 2.1.9　場の方程式

大雑把に言って，

$$\text{運動方程式} \quad \leftarrow \quad \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda}\ (\text{力}) \quad \leftarrow \quad g_{\mu\nu}\ (\text{ポテンシャル}) \quad \leftarrow \quad \text{場の方程式}$$

通常はアインシュタインの重力場の方程式，

$$G_{\mu\nu} \equiv R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\kappa T_{\mu\nu} \tag{116}$$

$$R_{\mu\nu} = R^{\lambda}_{\mu\lambda\nu}, \quad R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu} \tag{117}$$

$$R^{\mu}_{\nu\lambda\rho} = \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda,\rho} - \Gamma^{\mu}_{\nu\rho,\lambda} + \Gamma^{\mu}_{\sigma\rho}\Gamma^{\sigma}_{\nu\lambda} - \Gamma^{\mu}_{\sigma\lambda}\Gamma^{\sigma}_{\nu\rho} \tag{118}$$

を弱い重力場の近似のもとで解いて $g_{\mu\nu}$ の展開形を求める．ここで，$R^{\mu}_{\nu\lambda\rho}$ はリーマンテンソル，$R_{\mu\nu}$ はリッチテンソル，$R$ はリッチスカラー（スカラー曲率）である．

しかし，重力場の方程式は一意ではない（Brans-Dicke 理論など）．⇒ PPN formalism (パラメータ化されたポスト・ニュートン近似).

### 2.1.10　ニュートン近似

弱い重力場における近似．対応原理

重力 → 0 で特殊相対論 ⇒ $g_{\mu\nu} \cong \eta_{\mu\nu}$.

そこでメトリックを

$$g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}(x), \quad h_{\mu\nu}(x) \ll 1 \tag{119}$$

とおく．ここで遅い粒子 ($v \ll c$) を考えると運動方程式は，

$$\begin{aligned}\frac{dv^k}{dt} &= -c^2\Gamma^k_{00} + c(v^k\Gamma^0_{00} - 2v^i\Gamma^k_{i0}) + (2v^kv^i\Gamma^0_{i0} - v^iv^j\Gamma^k_{ij}) + \frac{1}{c}(v^kv^iv^j\Gamma^0_{ij}) \\ &\simeq -c^2\Gamma^k_{00}\end{aligned} \tag{120}$$

重力ポテンシャルを $\phi$ とおくと，ニュートンの運動方程式は

$$\frac{dv^k}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial x^k} \tag{121}$$

すなわち

$$-c^2\Gamma^k_{00} \sim \frac{\partial\phi}{\partial x^k} \tag{122}$$

となる．一方，

$$\Gamma^k_{00} = -\frac{1}{2}\frac{\partial h_{00}}{\partial x^k} \tag{123}$$

となるので，結局，

$$h_{00} = \frac{2\phi}{c^2} \tag{124}$$

を示唆する．したがってニュートン近似のメトリックとして，

$$
\begin{aligned}
g_{00} &\sim -1 + \frac{2\phi}{c^2} + \cdots && (125)\\
g_{i0} &\sim 0 && (126)\\
g_{ij} &\sim \delta_{ij} && (127)
\end{aligned}
$$

を得る．

### 2.1.11 固有時の方程式

固有時 $\tau$ ：任意に動いている時計の刻む時刻系．

$$
\begin{aligned}
ds^2 &= -c^2 d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -c^2 dt^2 \left( -g_{00} - \frac{2g_{i0}}{c}\frac{dx^i}{dt} - \frac{g_{ij}}{c^2}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt} \right) \\
d\tau &\sim dt \left( 1 - \frac{2\phi}{c^2} - \frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2} \right), \quad \boldsymbol{v} = \frac{d\boldsymbol{x}}{dt} && (128)
\end{aligned}
$$

ここで $\phi$ は時計の（この座標系での）重力力関数（rough にポテンシャルということもある）．したがって，

$$
\frac{d\tau}{dt} \cong \sqrt{1 - \frac{1}{c^2}\left(2\phi + \boldsymbol{v}^2\right)} \sim 1 - \frac{1}{c^2}\left(\phi + \frac{\boldsymbol{v}^2}{2}\right) + \cdots \tag{129}
$$

となり，この式を固有時の方程式 (Equation of Proper Time) と呼ぶ．ここで $1/c^2$ の項の $\phi$ は重力による時間の送れ (Gravitational Time Dilation)，$\boldsymbol{v}^2$ は Lorentz 変換（特殊相対論）による時間の遅れを表す．

### 2.1.12 ジオイド上の時計

回転している地球上（地心座標系）に固定された時計を考える．ただし，地球以外の天体は無視する．このとき，

$\phi$ : 地球の重力ポテンシャル

$\boldsymbol{v}$ : 時計の地心速度 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r}$.

すると $\phi + \boldsymbol{v}^2/2$ は地心座標系の有効ポテンシャル（見かけのポテンシャル）．しかし，回転座標系（$\prime$ で表す）では，

$$
\left.
\begin{array}{l}
\phi' = \phi + \frac{bdv^2}{2} \\
\boldsymbol{v}' = 0
\end{array}
\right\} \Rightarrow \phi' + \frac{\boldsymbol{v}'^2}{2} = \phi + \frac{\boldsymbol{v}}{2} \tag{130}
$$

となり，$\phi$ の一次では固有時は不変．

測地学では，

重力 (Gravity) : $\phi + \boldsymbol{v}^2/2$ (回転)

(万有引力的) 重力 (Gravitaion) : $\phi$ (非回転)

つまり，**固有時はジオイド面（広く等重力ポテンシャル面）上では $\phi$ の一次 ($\boldsymbol{v}/c$ の２次) の精度で同等である．** この事を利用して時計の（ラフな）同期が行われている．

$$
\begin{aligned}
W_0 &= \left(\phi_E + \frac{\boldsymbol{v}^2}{2}\right)_{\text{ジオイド面}} \sim 6.2636860(30) \times 10^7 \mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2 \\
\frac{W_0}{c^2} &\sim \frac{6.2636860(30) \times 10^7 \mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2}{(2.99792458 \times 10^8 \mathrm{m/s})^2} \sim 6.9686291(3) \times 10^{-10}
\end{aligned}
\tag{131}
$$

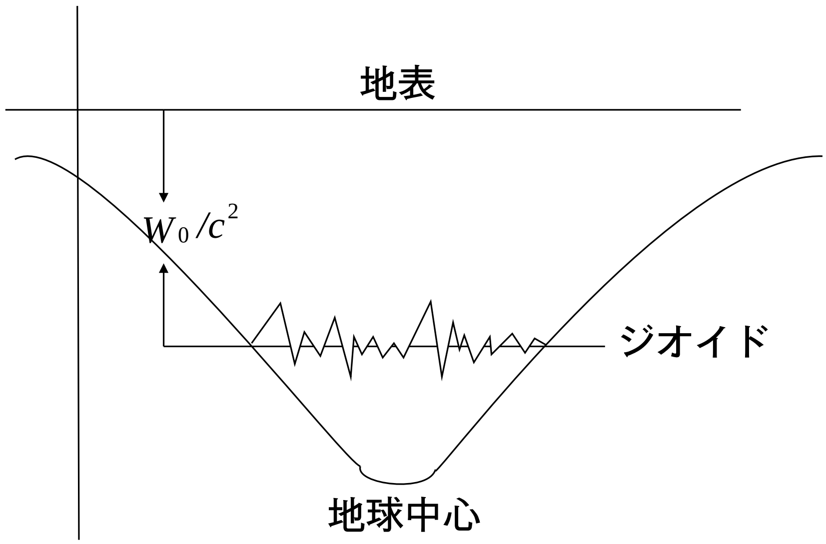



Figure 16: ジオイド

### 2.1.13　地表（≠ジオイド上）

$$
\Delta W = W - W_0 \cong \Delta\left(\phi_E + \frac{\boldsymbol{v}}{2}\right) \sim -gh \tag{132}
$$

ここで $g$ は重力加速度 (Gravity)，$h$ は標高．今 $g \sim 9.8$ m/s，$c^2 \sim 1.0 \times 10^{17}$ (m/s)$^2$，$h = 1$ m，とすると，

$$
\frac{gh}{c^2} \sim 9.8 \times 10^{-17}
$$

つまり，原子時計の Rate は概ね $1.0 \times 10^{-16}$/m で変化する．

### 2.1.14　自由運動する時計

$$
\frac{d\tau}{dt} = 1 - \left(\phi + \frac{\boldsymbol{v}^2}{2}\right), \quad \phi = \frac{\mu}{r}, \quad \mu = GM \tag{133}
$$

ケプラー運動 ($e < 1$) の場合，エネルギー積分，

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2 - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a} \tag{134}$$

より直ちに ($a$ : semi-major axis)，

$$\frac{d\tau}{dt} = 1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{2a}\right) = 1 - \frac{\mu}{c^2 a}\left(\frac{2a}{r} - \frac{1}{2}\right)$$

ここで，

$$\frac{r}{a} = 1 - e\cos u, \quad nadt = rdu, \quad \mu = n^2 a^3$$

より ($u$ : eccentric anomary $E$ とも書く，$n$ mean motion)，

$$\begin{aligned}\Delta\tau &= \int\left[1 - \frac{\mu}{c^2 a}\left(\frac{2a}{r} - \frac{1}{2}\right)\right]dt \\ &= \left(1 + \frac{\mu}{2c^2 a}\right)\int dt - \frac{2\mu}{c^2 a}\int\frac{a}{r}dt = \left(1 + \frac{\mu}{2c^2 a}\right)\int dt - \frac{2\mu}{c^2 na}\int du\end{aligned}$$

ここでケプラー方程式，

$$u - e\sin u = \ell = n(t - t_0) \tag{135}$$

を用いると，

$$\tau - \tau_0 = \left(1 + \frac{\mu}{2c^2 a}\right)(t - t_0) - \frac{2\mu}{c^2 na}(u - u_0) = \left(1 - \frac{3\mu}{2c^2 a}\right)(t - t_0) - \frac{2\mu e}{c^2 na}\sin u \tag{136}$$

ここで，$\mu/c^2$ を half of gravitational radius とすると，

| | $\mu$ | $\mu/c^2$ |
|---|---|---|
| 太陽 | $1.327 \times 10^{20}$ m$^2$/s$^2$ | 1.476 km |
| 地球 | $3,99 \times 10^{14}$ m$^2$/s$^2$ | 4.44 mm |

GPS/NAVSTAR : $a \sim 2.66 \times 10^7$ km, $e \sim 0.003 \sim 0.010, n = \sqrt{n/a^3} \sim 1.459 \times 10^{-4}$ rad/s

$$\begin{aligned}&\frac{3}{2}\frac{\mu}{c^2 a} \sim \frac{4.44 \times 10^{=3}}{2.66 \times 10^7} \sim 2.50 \times 10^{-10} \\ &2\frac{\mu}{c^2 a}\frac{e}{n} \sim 2 \times \frac{4.44 \times 10^{-3}}{2.66 \times 10^7}\frac{0.003 \sim 0.010}{1.459 \times 10^{-4}} \sim (6.9 \sim 22.9) \times 10^{-9}\end{aligned}$$

＜応用＞太陽の回りの地球 : $e \sim 0.0167, n = 2\pi/(365.2422 \times 86400) \sim 1.98 \times 10^{-7}$ rad/s

$$\begin{aligned}&\frac{3}{2}\frac{\mu}{c^2 a} \sim 1.5 \times \frac{1.48 \times 10^3}{1.50 \times 10^{11}} \sim 1.48 \times 10^{-8} \\ &2\frac{\mu}{c^2 a}\frac{e}{n} \sim 2 \times \frac{1.48 \times 10^3}{1.50 \times 10^{11}}\frac{0.0167}{1.98 \times 10^{-7}} \sim 1.66 \times 10^{-3}\end{aligned} \tag{137}$$

### 2.1.15 光の運動方程式再考

ニュートン近似で運動方程式を考えると，メトリックは

$$\begin{cases} g_{00} = -1 + \frac{2\phi}{c^2} \\ g_{0i} = 0 \\ g_{ij} = \delta_{ij} \end{cases} \tag{138}$$

となる[9]．したがってメトリックを $\mu$ 成分で偏微分すると，

$$g_{00,0} = \frac{2\dot{\phi}}{c^3}, \quad g_{00,i} = 0, \quad \text{others} = 0 \tag{139}$$

である[10]．運動方程式の計算のために，まずクリストッフェル記号を計算すると，ニュートン近似のメトリックにおいて，

$$\begin{aligned} \Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} &= \frac{1}{2}g^{\mu\kappa}\left(g_{\nu\kappa,\lambda} + g_{\kappa\lambda,\nu} - g_{\nu\lambda,\kappa}\right) \\ &= \frac{1}{2}g^{\mu\kappa}\left(\delta^0_\nu\delta^0_\kappa g_{00,\lambda} + \delta^0_\kappa\delta^0_\lambda g_{00,\nu} - \delta^0_\nu\delta^0_\lambda g_{00,\kappa}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(g^{\mu 0}g_{00,\lambda}\delta^0_\nu + g^{\mu 0}g_{00,\nu}\delta^0_\lambda - g^{\mu\kappa}g_{00,\kappa}\delta^0_\lambda\delta^0_\nu\right) \end{aligned} \tag{140}$$

より，

$$\begin{aligned} \Gamma^{i}_{00} &= \frac{1}{2}\left(g^{i0}g_{00,0}\delta^0_0 + g^{i0}g_{00,0}\delta^0_0 - g^{i\kappa}g_{00,\kappa}\right) \\ &= -\frac{1}{2}\delta^{i\kappa}g_{00,\kappa} = -\frac{1}{2}g_{00,k} = -\frac{1}{c^2}\phi_{,k} \end{aligned} \tag{141}$$

$$\begin{aligned} \Gamma^{0}_{00} &= \frac{1}{2}\left(g^{00}g_{00,0} + g^{00}g_{00,0} - g^{0\kappa}g_{00,\kappa}\right) \\ &= \frac{1}{2}g^{00}g_{00,0} = -\frac{1}{c^3}\dot{\phi}\frac{\dot{1}}{1-\frac{2\phi}{c^2}} \end{aligned} \tag{142}$$

$$\begin{aligned} \Gamma^{i}_{j0} &= \frac{1}{2}\left(g^{i0}g_{00,0}\delta^0_j + g^{i0}g_{00,0}\delta^0_0 - g^{i\kappa}g_{00,\kappa}\delta^0_j\delta^0_0\right) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{143}$$

$$\begin{aligned} \Gamma^{0}_{i0} &= \frac{1}{2}\left(g^{00}g_{00,0}\delta^0_i + g^{00}g_{00,i}\delta^0_0 - g^{0\kappa}g_{00,\kappa}\delta^0_i\delta^0_i\right) \\ &= \frac{1}{2}g^{00}g_{00,i} = -\frac{1}{c^2}\phi_{,i}\cdot\frac{1}{1-\frac{2\phi}{c^2}} \end{aligned} \tag{144}$$

---

[9] $g_{\mu\nu}$ の逆行列は，

$$\begin{cases} g^{00} = \frac{1}{-1+frac2\phi c^2} \approx -1 - \frac{2\phi}{c^2} - \frac{4\phi^2}{c^4} - \cdots \\ g^{0i} = 0 \\ g^{ij} = \delta^{ij} \end{cases}$$

となる．

[10] ここで

$$,0 = \frac{\partial}{\partial x^0} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}, \quad ,i = \frac{\partial}{\partial x}$$

である．

$$
\begin{aligned}
\Gamma^k_{ij} &= \frac{1}{2}\left(g^{k0}g_{00,i}\delta^0_j + g^{k0}g_{00,j}\delta^0_i + g^{k\kappa}g_{00,\kappa}\delta^0_i\delta^0_j\right) \\
&= 0 \qquad (145) \\
\Gamma^0_{ij} &= \frac{1}{2}\left(g^{00}g_{00,i}\delta^0_i + g^{00}g_{00,j}\delta^0_j - g^{0\kappa}g_{00,\kappa}\delta^0_i\delta^0_j\right) \\
&= 0 \qquad (146)
\end{aligned}
$$

まとめると，

$$
\Gamma^i_{00} = -\frac{\phi_{,i}}{c^2}, \quad \Gamma^0_{00} = -\frac{\dot{\phi}}{c^3}\frac{1}{1-\frac{2\phi}{c^2}}, \quad \Gamma^0_{i0} = -\frac{\phi_{,i}}{c^2}\frac{1}{1-\frac{2\phi}{c^2}}, \quad \text{others} = 0 \qquad (147)
$$

となる．よって光の運動方程式は

$$
\begin{aligned}
\frac{dv^k}{dt} &= -c^2\Gamma^k_{00} + cv^k\Gamma^0_{00} + 2v^kv^i\Gamma^0_{i0} \\
&= \phi_{,k} - \frac{v^k}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}\frac{1}{1-\frac{2\phi}{c^2}} - \frac{1}{c^2}v^kv^i\phi_{,i}\frac{1}{1-\frac{2\phi}{c^2}} \qquad (148)
\end{aligned}
$$

ベクトル形式で書き表すと，

$$
\begin{aligned}
\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} &= \nabla\phi - \frac{1}{1-\frac{2\phi}{c^2}}\left(\dot{\phi}\boldsymbol{v}\cdot\nabla\phi\right)\frac{\boldsymbol{v}}{c^2}{}_{\phi,\dot{\phi},v\sim c} \qquad (149) \\
&\sim \nabla\phi - \left(\frac{\boldsymbol{v}}{c}\cdot\nabla\phi\right)\frac{\boldsymbol{v}}{c} \qquad (150)
\end{aligned}
$$

となる．しかし，このニュートン近似による運動方程式は**間違い**.

なぜか？

ニュートン近似 $\rightarrow \boldsymbol{v}/c \ll 1 \rightarrow \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \nabla\phi$

しかし上の運動方程式は $v \sim c$ (勝手に拡散してしまう)

$\downarrow$

よって得られた結果と最初の仮定が consistent ではない.

## 2.2　ポスト・ガリレイ近似

### 2.2.1　ポスト・ガリレイ近似

ニュートン近似の次の近似
光の運動で，光の速度を $\boldsymbol{v} \sim c$ の粒子と考えてある程度妥当な近似.

　さて，時間反転 $M_t$ を考え，$g_{\mu\nu}$ のうち $g_{0i}$ のみ符号を変える．$\boldsymbol{v}$ の奇数次は符号を変え，偶数次は符号を変えない.

$$\begin{aligned} g_{00} &= -1 + \frac{2\phi}{c^2} + O\left(\left(\frac{\boldsymbol{v}}{c}\right)^2\right) + \cdots & (151) \\ g_{0i} &= 0 + O\left(\frac{\boldsymbol{v}}{c}\right) + \left(\left(\frac{\boldsymbol{v}}{c}\right)^3\right) + \cdots & (152) \\ g_{ij} &= \delta_{ij} + \left(\left(\frac{\boldsymbol{v}}{c}\right)^2\right) + \left(\left(\frac{\boldsymbol{v}}{c}\right)^4\right) + \cdots & (153) \end{aligned}$$

### 2.2.2　回転

$g_{0i}$ に $\frac{\boldsymbol{v}}{c}$ の項はあるのか？
↓
ない（もしあればコリオリ力が出て来る）.

いま，空間（剛体）回転（という一つの座標変換）を考えよう.

$$t' = t, \quad \boldsymbol{x}' = R\boldsymbol{x}, \quad R = R_z(\phi)R_x(\theta)R_z(\psi), \quad x^{a'} = R^{a'}_j x^j \tag{154}$$

ここで $(\phi, \theta, \psi)$ はオイラー角．このとき，

$$\frac{\partial x^{a'}}{\partial x^j} = R^{a'}_j, \quad \frac{\partial x^{0'}}{\partial x^j} = 0, \quad \frac{\partial x^{a'}}{\partial x^0} = \frac{1}{c}\frac{dR^{a'}_j}{dt}x^j \tag{155}$$

今，簡単のために

$$R = R_z(\omega t), \quad \omega = \text{一定} \tag{156}$$

としよう．このとき，

$$\begin{cases} t' = t \\ x' = x\cos\omega t + y\sin\omega t \\ y' = -x\sin\omega t + y\cos\omega t \\ z' = z \end{cases} \tag{157}$$

これより，

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^{1'}}{\partial x^0} = \frac{\partial x'}{c\partial t} &= -\frac{\omega}{c}(x\sin\omega t - y\cos\omega t) = \frac{\omega y'}{c} & (158) \\ \frac{\partial y'}{c\partial t} &= -\frac{\omega}{c}(x\cos\omega t - y\sin\omega t) = -\frac{\omega x'}{c} & (159) \\ \frac{\partial x'}{\partial x} &= \cos\omega t & (160) \end{aligned}$$

ここで,

$$R^{\alpha'}_{\mu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\omega}{c}y' & \cos\omega t & \sin\omega t & 0 \\ -\frac{\omega}{c}x' & -\sin\omega t & \cos\omega t & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R^{\mu}_{\alpha'} = R \tag{161}$$

このとき,

$$g_{\mu\nu} = R^{\alpha'}_{\mu} R^{\beta'}_{\nu} g_{\alpha'\beta'}, \quad g_{\alpha'\beta'} = \eta_{\alpha'\beta'} \tag{162}$$

とすると,

$$\begin{aligned} g_{00} &= R^{\alpha'}_{0} R^{\beta'}_{0} g_{\alpha'\beta'} \\ &= (R^{0'}_{0})^2 g_{0'0'} + 2R^{0'}_{0} R^{i'}_{0} g_{0'i'} + R^{i'}_{0} R^{j'}_{0} \\ &= -1 + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \left(y'^2 + x'^2\right) && (163) \\ g_{0j} &= R^{\alpha'}_{0} R^{\beta'}_{j} g_{\alpha'\beta'} \\ &= R^{0'}_{0} R^{0'}_{j} g_{0'0'} + R^{i'}_{0} R^{0'}_{j} g_{i'0'} + R^{i'}_{0} R^{k'}_{j} g_{i'k'} \\ &= R^{i'}_{0} R^{i'}_{j} && (164) \\ g_{01} &= \frac{\omega}{c}\left(y'\cos\omega t + x'\sin\omega t\right) = \frac{\omega}{c} y && (165) \\ g_{02} &= \frac{\omega}{c}\left(y'\sin\omega t - x'\cos\omega t\right) = -\frac{\omega}{c} x && (166) \\ g_{03} &= 0 && (167) \\ g_{ij} &- R^{\alpha'}_{i} R^{\beta'}_{j} g_{\alpha'\beta'} \\ &= R^{0'}_{i} R^{0'}_{j} g_{0'0'} + 2R^{k'}_{i} R^{0'}_{j} g_{k'0'} + R^{k'}_{i} R^{l'}_{j} g_{k'l'} \\ &= R^{k'}_{i} R^{k'}_{j} = \delta_{ij} && (168) \end{aligned}$$

回転 $R = R_z(\omega t)$ で

$$\eta_{\alpha'\beta'} \to g_{\mu\nu} \tag{169}$$

$$\begin{cases} g_{00} = -1 + \frac{\omega^2(x^2+y^2)}{c^2} \quad (\text{遠心力ポテンシャル}) \\ g_{01} = \frac{\omega y}{c} \\ g_{02} = -\frac{\omega x}{c} \\ g_{03} = 0 \\ g_{ij} = \delta_{ij} \end{cases} \tag{170}$$

一般に,

$$\frac{\partial \mathcal{R}}{dt} = \Omega\mathcal{R}, \quad \Omega = \begin{pmatrix} 0 & \omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\omega} = \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \tag{171}$$

となり，

$$\begin{cases} g_{00} = -1 + \frac{\boldsymbol{v}_{\text{rot}}^2}{c^2} \\ g_{0i} = -\frac{\boldsymbol{v}_{\text{rot}}}{c} \\ g_{ij} = \delta_{ij} \end{cases} \tag{172}$$

ここで，

$$\boldsymbol{v}_{\text{rot}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x} (= \Omega \boldsymbol{x}) \tag{173}$$

である．したがって，空間（剛体）回転は $g$ に密接に関係する．

もし，$g_{0i} = O\left(\boldsymbol{v}/c\right)$ だとすると，

$$\begin{cases} g_{00} = -1 + \frac{2\phi}{c} \\ g_{0i} = g_i = O\left(\frac{\boldsymbol{w}}{c}\right) \\ g_{ij} = \delta_{ij} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} g^{00} = \frac{1-g^{0j}g_{0j}}{g_{00}} \sim -1 - \frac{2\phi}{c^2} - \frac{\boldsymbol{w}^2}{c^2} \\ g^{0j} = g^{00}g_{0j} \sim -g_j = -\frac{\boldsymbol{w}}{c} \\ g^{ij} = \delta_{ij} + g^{0i}g_{0j} \sim \delta_i j + \boldsymbol{g} \otimes \boldsymbol{g} = \delta_{ij} + \frac{\boldsymbol{w} \otimes \boldsymbol{w}}{c^2} \end{cases} \tag{174}$$

これより，

$$g_{00,0} = \frac{2\dot{\phi}}{c^3}, \quad g_{00,k} = \frac{2\phi_{,k}}{c^2}, \quad g_{0j,0} = \frac{\dot{\boldsymbol{w}}}{c^2}, \quad g_{0j,k} = \frac{w_{j,k}}{c}, \quad \text{others} = 0 \tag{175}$$

これらを用いてクリストッフェル記号を計算すると，

$$\Gamma^{\mu}_{\nu\lambda} = \frac{1}{2} g^{\mu\kappa} \left(g_{\nu\kappa,\lambda} + g_{\kappa\lambda,\nu} - g_{\nu\mu,\kappa}\right) \tag{176}$$

$$\begin{aligned} \Gamma^{k}_{00} &= \frac{1}{2}\left(g^{k0}g_{00,0} + g^{k0}g_{00} - g^{k0}g_{00} + g^{kl}g_{0l,0} + g^{kl}g_{l0,0} - g^{kl}g_{00,l}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(g^{k0}g_{00,0} + 2g^{kl}g_{0l,0} - g^{kl}g_{00,l}\right) \\ &\sim \left(\frac{\dot{\boldsymbol{w}}}{c^2} - \frac{\nabla\phi}{c^2}\right)_k \left(\sim \frac{\dot{w}_{,k}}{c^2} - \frac{w_{,k}}{c^2}\right) \end{aligned} \tag{177}$$

$$\begin{aligned} \Gamma^{0}_{00} &= \frac{1}{2}\left(g^{00}g_{00,0} + 2g^{0l}g_{0l,0} - g^{0l}g_{00,l}\right) \\ &\sim O(3) \end{aligned} \tag{178}$$

$$\begin{aligned} \Gamma^{k}_{i0} &= \frac{1}{2}\left(g^{k0}g_{i0,0} + g^{k0}g_{00,i} - g^{k0}g_{0i,0} + g^{kj}g_{ij,0} + g^{kj}g_{j0,i} - g^{kj}g_{0i,j}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(g_{k0,i} - g_{0i,k}\right) = \frac{1}{2c}\left(w_{k,i} - w_{i,k}\right) \end{aligned} \tag{179}$$

$$\text{others} = 0 \tag{180}$$

これより運動方程式は，

$$\frac{dv^k}{dt} = -c^2\Gamma^k_{00} - 2cv^i\Gamma^k_{i0} \sim -\dot{w}_k + \phi_{,k} - v^i(w_{k,i} - w_{i,k}) \tag{181}$$

ベクトル形式で表すと，

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \nabla\phi - \dot{\boldsymbol{w}} - (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{w} + \nabla(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{w}) = \nabla\phi - \dot{\boldsymbol{w}} + \boldsymbol{v} \times (\nabla \times \boldsymbol{w}) \tag{182}$$

となる[11]．電磁場の Lorentz 力の公式，

$$
\begin{aligned}
\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} &= \frac{e}{m}\left(\boldsymbol{E}+\frac{1}{c}\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{H}\right) \qquad (183)\\
&\boldsymbol{E}=-\nabla\Phi-\frac{1}{c}\frac{\partial\boldsymbol{A}}{\partial t}, \quad \boldsymbol{H}=\nabla\times\boldsymbol{A}
\end{aligned}
$$

と比べると，

$$
\frac{e}{m}\Phi=-\phi, \quad \frac{e}{mc}\boldsymbol{A}=\boldsymbol{H} \tag{184}
$$

という対応がつく．したがって，

回転 $\cdots$ （コリオリ力）$\rightarrow$ 磁場

となる．ニュートン力学の経験によれば，適当な座標系を取れば慣性系で，少なくとも，

$$
\dot{\boldsymbol{w}}=0, \quad \nabla\times\boldsymbol{w}=0
$$

としてよい．$\boldsymbol{w}$ の定数部分も 2 次形式の対角化でよい．したがって，ポスト・ガリレイ近似のもとでは，$g_{0i}$ に $O(\boldsymbol{v}/c)$ の項はないとしてよい．

### 2.2.3　ポスト・ガリレイ近似のメトリック

便宜的に，

$$
\begin{aligned}
g_{00} &= -1+\frac{2\phi}{c^2} & (185)\\
g_{0j} &= 0 & (186)\\
g_{ij} &= \delta_{ij}+\underline{\frac{2\Phi_{ij}}{c^2}} & (187)
\end{aligned}
$$

と書く．$\Phi_{ij}$ は

1. 2 階対称
2. $r\rightarrow\infty$ で $\Phi_{ij}\rightarrow 0$
3. $\rho, \boldsymbol{x}$ だけの関数[12]

---

[11] ここでベクトル公式，

$$
\boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})=-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})+(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}
$$

を用いた．

[12] 一つの可能性として，

$$
\delta_{ij}\phi, \quad \phi_{ij}^{(\boldsymbol{x})}\equiv\int\frac{\rho'(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')_i(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')_j}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}d\boldsymbol{x}'_i d\boldsymbol{x}'_j \tag{188}
$$

と置ける．

4. 空間回転に対して不変

これより，

$$\Phi_{ij} = \gamma_1 \phi \delta_{ij} + \gamma_2 \phi_{ij} \tag{189}$$

と置ける．ここでゲージ変換，

$$\begin{cases} t \to \tilde{t} \\ x^j \to x^{\tilde{j}} \equiv x^j - \frac{\gamma_2}{c^2}\frac{\partial}{\partial x^j}\int d^3\boldsymbol{x}'\rho(\boldsymbol{x}')(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') = x^j - \frac{\gamma_2}{c^2}\frac{\partial \chi}{\partial x^j} \end{cases} \tag{190}$$

$$\triangle\chi = -2\phi, \quad \text{スーパーポテンシャル，重調和} \tag{191}$$

すると，

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^{\tilde{j}}}{\partial x^k} &= \delta^j_k - \frac{\gamma_2}{c^2}\frac{\partial^2 \chi}{\partial x^j \partial x^k} \\ &= \delta_{jk} - \frac{\gamma_2}{c^2}\int d^3\boldsymbol{x}'\rho(\boldsymbol{x}')\left[\frac{\delta_{jk}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} - \frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')_j(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')_j}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}\right] \\ &= \delta_{jk} - \frac{\gamma_2 \phi}{c^2}\delta_{jk} + \frac{\gamma_2 \phi_{jk}}{c^2} \end{aligned} \tag{192}$$

$$\frac{\partial x^k}{\partial x^{\tilde{j}}} = \delta_{jk} + \frac{\gamma_2 \phi}{c^2}\delta_{jk} - \frac{\gamma_2 \phi_{jk}}{c^2} \tag{193}$$

これより $g_{ij}$ の変換は，

$$\begin{aligned} g_{jk} \to g_{\tilde{i}\tilde{j}} &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\tilde{i}}}\frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\tilde{j}}} g_{\mu\nu} = \frac{\partial x^l}{\partial x^{\tilde{i}}}\frac{\partial x^m}{\partial x^{\tilde{j}}} g_{lm} \\ &= \left(\delta_{li} + \frac{\gamma_2 \phi}{c^2}\delta_{li} - \frac{\gamma_2 \phi_{li}}{c^2}\right)\left(\delta_{mj} + \frac{\gamma_2 \phi}{c^2}\delta_{mj} - \frac{\gamma_2 \phi_{mj}}{c^2}\right)\left(\delta_{lm} + \frac{2\gamma_1 \phi}{c^2}\delta_{lm} + \frac{2\gamma_2 \phi_{lm}}{c^2}\right) \\ &= \delta_{ij} + 2(\gamma_2 + \gamma_2)\frac{\phi}{c^2}\delta_{ij} + \cdots \end{aligned} \tag{194}$$

ここで，

$$\gamma \equiv \gamma_1 + \gamma_2$$

とおくと，結局，

$$\Phi_{ij} = \gamma \phi \delta_{ij} \tag{195}$$

と置いて良い．ここで $\gamma$ は PPN パラメータである（Loerntz 因子ではない）．この $\gamma$ はアインシュタインの相対論では

$$\gamma = 1$$

に，一方ブランス・ディッケ理論（スカラーテンソル理論）では，

$$\gamma = \frac{1+\omega}{2+\omega}$$

となり，重力理論によって異なった値をとる[13]．よって，ポスト・ガリレイ近似のメトリックは，

$$\begin{cases} g_{00} = -1 + \frac{2\phi}{c^2} \\ g_{0j} = 0 \\ g_{ij} = \delta_{ij} + \frac{2\gamma\phi}{c^2}\delta_{ij} \end{cases} \tag{196}$$

となる．

### 2.2.4　速い粒子の運動方程式

まず．ポスト・ガリレイ近似のメトリックの逆行列を求めると，

$$\begin{cases} g^{00} = \frac{1}{g_{00}} = \frac{1}{-1+\frac{2\phi}{c^2}} \\ g^{0i} = 0 \\ g^{ij} = \delta_{ij}\frac{1}{1+\frac{2\gamma\phi}{c^2}} \end{cases} \tag{197}$$

となる．メトリックの偏微分は，

$$g_{00,0} = \frac{2\dot{\phi}}{c^3}, \quad g_{00,k} = \frac{2\phi_{,k}}{c^2}, \quad g_{0j,\mu} = 0, \quad g_{ij,0} = \frac{2\gamma\dot{\phi}}{c^3}\delta_{ij}, \quad g_{ij,k} = \frac{2\gamma\phi_{,k}}{c^2}\delta_{ij}$$

これらを用いてクリストッフェル記号を計算すると．

$$\begin{aligned} \Gamma^k_{00} &= \frac{1}{2}\left(g^{k0}g_{00,0} + 2g^{kj}g_{oj,0} - g^{kj}g00,j\right) \\ &= -\frac{\phi_k}{c^2}\frac{1}{1+\frac{2\gamma\phi}{c^2}} \sim -\frac{\phi_k}{c^2} \end{aligned} \tag{198}$$

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{00} &= \frac{1}{2}\left(g^{00}g_{00,0} + 2g^{0j}g_{0j,0} - g^{0j}g_{00,j}\right) \\ &= -\frac{\dot{\phi}}{c^2}\frac{1}{1-\frac{2\gamma\phi}{c^2}} \sim -\frac{\dot{\phi}}{c^2} \end{aligned} \tag{199}$$

$$\begin{aligned} \Gamma^k_{j0} &= \frac{1}{2}\left(g^{k0}g_{00,j} + g^{kl}g_{0l,j} + g^{kl}g_{lj,0} - g^{kl}g_{0j,l}\right) \\ &= \frac{\gamma\dot{\phi}}{c^2}\delta^k_j\frac{1}{1+\frac{2\gamma\phi}{c^2}} \sim \frac{\gamma\dot{\phi}}{c^2}\delta^k_j \end{aligned} \tag{200}$$

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{j0} &= \frac{1}{2}\left(g^{00}g_{00,j} + g^{0l}g_{0l,j} + g^{0l}g_{lj,0} - g^{0l}g_{0j,l}\right) \\ &= -\frac{\phi_{,j}}{c^2}\frac{1}{1-\frac{2\phi}{c^2}} \sim -\frac{\phi_{,j}}{c^2} \end{aligned} \tag{201}$$

$$\begin{aligned} \Gamma^k_{ij} &= \frac{1}{2}\left(g^{k0}g_{0i,j} + g^{k0}g_{0j,i} - g^{k0}g_{ij,0} + g^{kl}g_{li,j} + g^{kl}g_{lj,i} - g^{kl}g_{ij,l}\right) \\ &= \frac{\gamma}{c^2}\left(\phi_{,i}\delta^k_j + \phi_{,j}\delta^k_i - \phi_{,k}\delta^i_j\right)\frac{1}{1+\frac{2\gamma\phi}{c^2}} \end{aligned} \tag{202}$$

[13] $\omega \to \infty$ でアインシュタインの理論に一致する．

$$
\begin{aligned}
\Gamma^0_{ij} &= \frac{1}{2}\left(g^{00}g_{0i,j} + g^{00}g_{0j,i} - g^{00}g_{ij,0} + g^{0l}g_{li,j} + g^{0l}g_{lj,i} - g^{0l}g_{ij,l}\right) \\
&= \frac{\gamma\dot{\phi}}{c^3}\delta_{ij}\frac{1}{1-\frac{2\gamma\phi}{c^2}} \sim \frac{\gamma\dot{\phi}}{c^3}\delta_{ij} \qquad (203)
\end{aligned}
$$

これらを用いると運動方程式は，

$$
\begin{aligned}
\frac{dv^k}{dt} &= -c^2\Gamma^k_{00} + cv^k\Gamma^0_{00} - 2cv^i\Gamma^k_{i0} - v^iv^j\Gamma^k_{ij} + \frac{1}{c}v^iv^jv^k\Gamma^0_{ij} \\
&= \phi_{,k} - \frac{\dot{\phi}}{c^2}v^k - 2cv^i\frac{\gamma\dot{\phi}}{c^2}\delta^k_i + 2v^kv^i\left(-\frac{\phi_{,i}}{c^2}\right) \\
&\quad -v^iv^j\frac{\gamma}{c}\left(\phi_{,i}\delta_{kj} + \phi_{,j}\delta_{ki} - \phi_{,k}\delta_{ij}\right) + \frac{1}{c}v^kv^iv^j\frac{\gamma\dot{\phi}}{c^3}\delta_{ij} \\
&= \phi_{,k} - (1+2\gamma)\frac{\dot{\phi}}{c^2}v^k - 2\frac{v^i\phi_{,i}}{c^2}v^k \\
&\quad -\frac{\gamma}{c}\left(v^i\phi_{,i}v^k + v^j\phi_{,j}v^k - v^iv^i\phi_{,k}\right) + \frac{\gamma\dot{\phi}}{c^4}v^iv^iv^k \qquad (204)
\end{aligned}
$$

ベクトル形式で書くと，

$$
\begin{aligned}
\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} &= \nabla\phi - (1+2\gamma)\frac{\dot{\phi}}{c^2}\boldsymbol{v} - 2(1-\gamma)\frac{\boldsymbol{v}\cdot\nabla\phi}{c^2}\boldsymbol{v} + \frac{\gamma\boldsymbol{v}^2}{c^2}\nabla\phi + \frac{\gamma\boldsymbol{v}^2\dot{\phi}}{c^4}\boldsymbol{v} \\
&= \left(1+\gamma\frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2}\right)\nabla\phi - \underline{\left[(1+2\gamma) - \gamma\frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2}\right]\frac{\dot{\phi}}{c^2}} - 2(1+\gamma)\frac{\boldsymbol{v}\nabla\phi}{c^2}\boldsymbol{v} \qquad (205)
\end{aligned}
$$

これが，ポスト・ガリレイ近似における速い粒子 $\boldsymbol{v}\sim c$ の運動方程式である．ただし，アンダーラインの項は無視して来た $g_{0i}$ のオーダーと同じなので本当は正しくない．

### 2.2.5　光の運動方程式

光は長さゼロの測地線 $ds^2 = 0$ なので，拘束条件，

$$
ds^2 = g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu
$$

から，

$$
\begin{aligned}
0 &= g_{00} + 2g_{0j}\frac{dx^j}{dx^0} + g_{ij}\frac{dx^i}{dx^0}\frac{dx^j}{dx^0} - 1 + \frac{2\phi}{c^2} + \left(1+\frac{2\gamma\phi}{c^2}\right)\frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2} \\
\frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2} &= \frac{1-\frac{2\phi}{c^2}}{1+\frac{2\gamma\phi}{c^2}} \cong 1 - 2(a+\gamma)\frac{\phi}{c^2} \qquad (206)
\end{aligned}
$$

ここで $\boldsymbol{v}^2/c^2 = 1$ と近似して，

$$
\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = (1+\gamma)\nabla\phi - \frac{\dot{\phi}}{\underline{c^2}} - 2(1+\gamma)\left(\frac{\boldsymbol{v}}{c}\cdot\nabla\phi\right)\frac{\boldsymbol{v}}{c} \qquad (207)
$$

ここでアンダーラインの項は一つしたのオーダーである．結局，

$$
\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = (1+\gamma)\left[\nabla\phi - 2\left(\frac{\boldsymbol{v}}{c}\cdot\nabla\phi\right)\frac{\boldsymbol{v}}{c}\right] - \frac{\dot{\phi}}{c^2}\boldsymbol{v} \qquad (208)
$$

最後の項は小さい量となる．これがポスト・ガリレイ近似における光の運動方程式である[14]．

[14] ここでは積分，

$$\left|\frac{\boldsymbol{v}}{c}\right| = 1 - (1+\gamma)\frac{\phi}{c^2}$$

がある．

## 2.3　光の運動

光に及ぼす重力場の影響は小さい（例えば太陽の運動）.

$$\dot{\phi} \sim \frac{|\nabla\phi|}{c} \tag{209}$$

このとき $(\dot{\phi}/c^2)\boldsymbol{v}$ は次のオーダーになる．光の運動方程式は，

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} &= (1+\gamma)\left[\nabla\phi - 2\left(\frac{\boldsymbol{v}}{c}\cdot\nabla\phi\right)\frac{\boldsymbol{v}}{c}\right] \quad (210) \\ \nabla\phi &= -GM_J\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_J}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}_J|^3} \quad (211) \end{aligned}$$

ここで，$GM_J$ は天体 $J$ の重力定数×質量を，$\boldsymbol{x}_J$ は天体 $J$ の位置を表す．いま

$$\frac{|\nabla\phi|}{c^2} \ll 1$$

より，この方程式を摂動論で解く.
0 次の解：

$$\frac{d\boldsymbol{v}^{(0)}}{dt} = 0, \quad \Rightarrow \begin{cases} \boldsymbol{v}^{(0)} = \boldsymbol{v}_0 \\ \boldsymbol{x}^{(0)} = \boldsymbol{x}_0 + \boldsymbol{v}_0(t-t_0) \end{cases} \quad \text{（等速直線運動）} \tag{212}$$

1 次の補正項：

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{v}^{(1)}}{dt} &= (1+\gamma)\left[\nabla\phi(\boldsymbol{x}^{(0)}) - 2\left(\frac{\boldsymbol{v}^{(0)}}{c}\cdot\nabla\phi(\boldsymbol{x}^{(0)})\right)\frac{\boldsymbol{v}^{(0)}}{c}\right] \quad (213) \\ \frac{d\boldsymbol{x}^{(1)}}{dt} &= \boldsymbol{v}^{(1)} \quad (214) \\ & \boldsymbol{v}^{(1)} = 0, \quad \boldsymbol{x}^{(1)} = 0, \quad \text{at} \quad t = t_0 \end{aligned}$$

さて，$1+\gamma$ は定数，$\boldsymbol{v}^{(0)}$ は定ベクトルであるから，もし，

$$\frac{d\Delta\boldsymbol{v}}{dt} = \nabla\phi(\boldsymbol{x}^{(0)}), \quad \frac{d\Delta\boldsymbol{x}}{dt} = \Delta\boldsymbol{v}$$

が解ければ，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}^{(1)} &= (1+\gamma)\left[\Delta\boldsymbol{v} + 2\left(\frac{\boldsymbol{v}^{(\mathbf{0})}}{c}\cdot\Delta\boldsymbol{v}\right)\frac{\boldsymbol{v}^{(0)}}{c}\right] \quad (215) \\ \boldsymbol{x}^{(1)} &= (1+\gamma)\left[\Delta\boldsymbol{x} + 2\left(\frac{\boldsymbol{v}^{(\mathbf{0})}}{c}\cdot\Delta\boldsymbol{x}\right)\frac{\boldsymbol{v}^{(0)}}{c}\right] \quad (216) \end{aligned}$$

は求める運動方程式の解である.

　ここで積分公式，

$$\int dt \frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}t}{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}t|^3} = \frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}t}{|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}t|} \times \frac{\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2} \quad \boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\text{は定ベクトル} \tag{217}$$

を用いて[15]，

$$\Delta \boldsymbol{v} = -\int_0^{t-t_0} dt' GM_J \frac{\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_J + \boldsymbol{v}_0 t'}{|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_J + \boldsymbol{v}_0 t'|^3}, \quad t' = t - t_0 \tag{219}$$

ここで,

$$\boldsymbol{n}_0 = \frac{\boldsymbol{v}^{(0)}}{c}, \quad \boldsymbol{r}_{0J} = \boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_J, \quad \boldsymbol{r}_J = \boldsymbol{x}^{(0)} - \boldsymbol{x}_J = \boldsymbol{r}_{0J} + c\boldsymbol{n}_0(t - t_0)$$
$$\boldsymbol{s}_{0J} = \boldsymbol{r}_{0J} \times \boldsymbol{n}_0 = \frac{\boldsymbol{r}_{0J} \times \boldsymbol{v}_0}{c}$$

等とおくと,

$$\begin{aligned}\Delta \boldsymbol{v} &= -GM_J \left[\frac{\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_J + \boldsymbol{v}_0 t}{|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_J + \boldsymbol{v}_0 t|}\right]_0^{t-t_0} \times \frac{(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_J) \times \boldsymbol{v}_0}{|(\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_J) \times \boldsymbol{v}_0|} \\ &= -GM_J \left(\frac{\boldsymbol{r}_J}{r_J} - \frac{\boldsymbol{r}_{0J}}{r_{0J}}\right) \times \frac{c}{c^2} \frac{\boldsymbol{s}_J}{|\boldsymbol{s}_J|^2} \\ &= -\frac{GM_J}{c}\left(\frac{\boldsymbol{r}_J}{r_J} - \frac{\boldsymbol{r}_{0J}}{r_{0J}}\right) \times \frac{\boldsymbol{s}_J}{|\boldsymbol{s}_J|^2}\end{aligned} \tag{220}$$

これをさらに積分公式,

$$\int \frac{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}t}{|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}t|} dt = \frac{\boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{b}|^2}|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}t| + \frac{\boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})}{|\boldsymbol{b}|^3} \ln\left[|\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}t| + \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}t)\right] \tag{221}$$

を用いてもう一度積分すると[16]，

$$\begin{aligned}\Delta \boldsymbol{x} &= -\frac{GM_J}{c}\left[\frac{\boldsymbol{v}_0}{|\boldsymbol{v}|^2}|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_J + \boldsymbol{v}_0 t'| + \frac{\boldsymbol{v}_0 \times ((\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_J) \times \boldsymbol{v}_0)}{|\boldsymbol{v}_0|^3}\right. \\ &\quad \left. \times \ln\left\{|\boldsymbol{v}_0||\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_J + \boldsymbol{v}_0 t'| + \boldsymbol{v}_0 \cdot (\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_J + \boldsymbol{v}_0 t')\right\} - \frac{\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_J}{|\boldsymbol{x}_0 - \boldsymbol{x}_J|} t'\right]_0^{t-t_0} \times \frac{\boldsymbol{s}_{0J}}{|\boldsymbol{s}_{0J}|^2}\end{aligned} \tag{223}$$

つまり,

$$\Delta \boldsymbol{x} = -\frac{GM_J}{c}\left[\frac{\boldsymbol{n}_0}{c}(r_J - r_{0J}) + \frac{\boldsymbol{n}_0 \times \boldsymbol{s}_{0J}}{c} \ln\left|\frac{n_0 r_0 + \boldsymbol{n}_0 \cdot \boldsymbol{r}_0}{n_0 r_{0J} + \boldsymbol{n}_0 \cdot \boldsymbol{r}_{0J}}\right| - \frac{\boldsymbol{r}_{0J}}{r_{0J}}(t - t_0)\right] \times \frac{\boldsymbol{s}_{0J}}{s_{0J}^2} \tag{224}$$

---

[15] 数学大公式集（丸善，大槻訳），2, 265, 5-6 より，

$$\int \frac{d + et}{\sqrt{a + 2bt + ct^2}^3} dt = \frac{(db - ae) - (cd - be)t}{(ac - b^2)\sqrt{a + 2bt + ct^2}} \tag{218}$$

から，$\boldsymbol{b}^2 \to c, \boldsymbol{a}^2 \to a, \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a} \to b, \boldsymbol{a} \to d, \boldsymbol{b} \to e$ と置き換え，$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2 - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2 \to ac - b, \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{a} - \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b} \to db - ae, \boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b}^2 - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{b} \to cd - be$ とすればよい.

[16] 数学大公式集，2.261, 2.264,2 より，

$$\begin{aligned}\int \frac{d + et}{\sqrt{a + 2bt + ct^2}} &= \frac{e\sqrt{a + 2bt + ct^2}}{c} + \left(d - \frac{b}{c}e\frac{1}{\sqrt{c}}\right)\ln\left(\sqrt{c}\sqrt{a + 2bt + ct^2} + ct + b\right) \\ &= \frac{1}{c}\left\{e\sqrt{a + 2bt + ct^2} + (cd - be)\frac{1}{\sqrt{c}}\ln\left[\sqrt{c}\sqrt{a + 2bt + ct^2} + ct + b\right]\right\}\end{aligned} \tag{222}$$

より，$\boldsymbol{b}^2 \to c, \boldsymbol{a}^2 \to a, \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \to b, \boldsymbol{a} \to d, \boldsymbol{b} \to e$ と置き換える.

この $\Delta\boldsymbol{x}, \Delta\boldsymbol{v}$ を用いて,

$$\begin{cases} \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^{(0)} + \boldsymbol{x}^{(1)} = \boldsymbol{x}_0 + c\boldsymbol{n}_0(t - t_0) + (1+\gamma)\left[\Delta\boldsymbol{x} - (\boldsymbol{n}_0 \cdot \Delta\boldsymbol{x})\boldsymbol{n}_0\right] \\ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^{(0)} + \boldsymbol{v}^{(1)} = c\boldsymbol{n}_0 + (1+\gamma)\left[\Delta\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{n}_0 \cdot \Delta\boldsymbol{v})\boldsymbol{n}_0\right] \end{cases} \tag{225}$$

これが1次の解である（2次の解は Richter & Matzmaer (198?) にある）.

### 2.3.1 光行差方程式

いま $t = t_1$ に $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1$ を発した光が $t = t_2$ に $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_2$ に達したとすると,

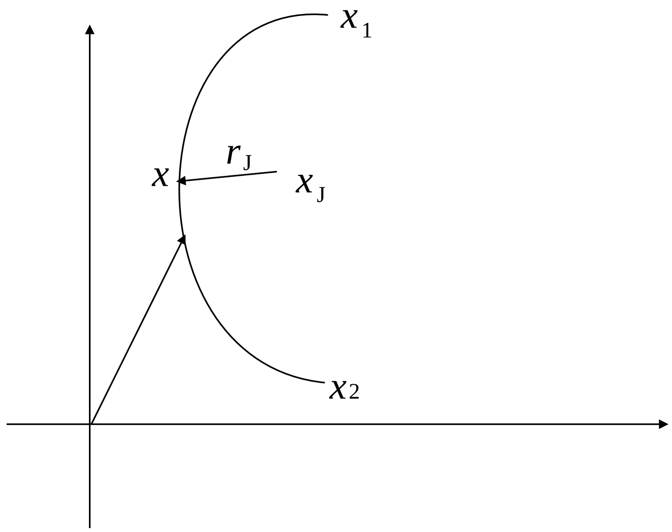



Figure 17: 光行差

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1 &= \boldsymbol{v}_1(t_2 - t_1) + (1+\gamma)\left[\Delta\boldsymbol{x}_{21} - 2(\boldsymbol{n}_1 \cdot \Delta\boldsymbol{x}_{21})\boldsymbol{n}_1\right] && (226) \\ \boldsymbol{v}_1 &= c\boldsymbol{n}_1 && (227) \\ \Delta\boldsymbol{x}_{21} &= -\frac{GM_J}{c}\left[\boldsymbol{n}_1(r_{2J} - r_{1J}) + \boldsymbol{n}_1 \times \boldsymbol{s}_{1J}\right. \\ &\quad \left. \times \ln\left|\frac{n_1 r_{1J} + \boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{r}_{2J}}{n_1 r_{2J} + \boldsymbol{n}_1 \cdot \boldsymbol{r}_{1J}}\right| - c\frac{\boldsymbol{r}_{1J}}{r_{1J}}(t_2 - t_1)\right] \times \frac{\boldsymbol{s}_{1J}}{s_{1J}^2} && (228) \end{aligned}$$

２乗を取ると,

$$\begin{aligned} r_{21}^2 = |\boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1|^2 &= c^2 n_1^2 (t_2 - t_1)^2 + 2(1+\gamma)(\Delta\boldsymbol{x}_{21} \cdot c\boldsymbol{n}_1)(t_2 - t_1) \\ &\quad -2(1+\gamma)(\boldsymbol{n}_1 \cdot \Delta\boldsymbol{x}_{21})(\boldsymbol{n}_1 \cdot c\boldsymbol{n}_1)(t_2 - t_1) + O(|\Delta\boldsymbol{x}_{21}|^2) \end{aligned}$$

ここで $n_1^2 \sim 1$ より,

$$\begin{aligned} r_{21}^2 &\cong c^2 n_1^2 (t_2 - t_1)^2 - 2(1+\gamma)(\Delta\boldsymbol{x}_{21} \cdot c\boldsymbol{n}_1)(t_2 - t_1) \\ r_{21} &= c n_1 (t_2 - t_1) - (1+\gamma)(\boldsymbol{n}_1 \cdot \Delta\boldsymbol{x}_{21}) && (229) \end{aligned}$$

さて，

$$\boldsymbol{n}_1\cdot(\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{s}_{1J})=0,\boldsymbol{n}_1\cdot\{(\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{s}_{1J})\times\boldsymbol{s}_{1J}\}=(\boldsymbol{s}_{1J}\times\boldsymbol{n}_1)^2-\boldsymbol{s}_{1J}^2\boldsymbol{n}_1^2\sim-\boldsymbol{s}_{1J}^2\boldsymbol{n}_1\cdot(\boldsymbol{r}_{1J}\times\boldsymbol{s}_{1J})=-\boldsymbol{s}_{1J^2}$$

より[17]，

$$\boldsymbol{n}_1\cdot\Delta\boldsymbol{x}_{21}=\frac{GM_J}{c^2}\left[\ln\left|\frac{n_1r_{1J}+\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{r}_{2J}}{n_1r_{2J}+\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{r}_{1J}}\right|-c\frac{t_2-t_1}{r_{1J}}\right] \tag{230}$$

したがって，

$$\begin{aligned} r_{21} &= cn_1(t_2-t_1)-(1+\gamma)\frac{GM_J}{c^2}\ln\left|\frac{n_1r_{1J}+\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{r}_{2J}}{n_1r_{2J}+\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{r}_{1J}}\right|+\frac{GM_J}{c}\frac{t_2-t_1}{r_{21}} \\ &= c\left\{n_1+(1+\gamma)\frac{GM_J}{c^2}\frac{1}{r_{21}}\right\}(t_2-t_1)-(1+\gamma)\frac{GM_J}{c^2}\ln\left|\frac{n_1r_{1J}+\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{r}_{2J}}{n_1r_{2J}+\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{r}_{1J}}\right| \end{aligned}$$

拘束条件より，

$$n_1=1-(1+\gamma)\frac{GM_J}{c^2}\frac{1}{r_{21}}$$

より，

$$\left\{n_1+(1+\gamma)\frac{GM_J}{c^2}\frac{1}{r_{21}}\right\}=1$$

これより，

$$c(t_2-t_1)=r_{21}-(1+\gamma)\frac{GM_J}{c^2}\ln\left|\frac{n_1r_{1J}+\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{r}_{2J}}{n_1r_{2J}+\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{r}_{1J}}\right| \tag{231}$$

今までの議論は $GM_J$ に関して Linear であり，$|\quad|$ の中では $n_1\sim1$ としてよいので，

$$c(t_2-t_1)=r_{21}-(1+\gamma)\sum_J\frac{GM_J}{c^2}\ln\left|\frac{r_{1J}+\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{r}_{2J}}{r_{2J}+\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{r}_{1J}}\right| \tag{232}$$

これが光行差方程式である．ここで，

$$r_{21}=|\boldsymbol{x}_2(t_2)-\boldsymbol{x}_1(t_1)|,\quad r_{2J}=|\boldsymbol{x}_2(t_2)-\boldsymbol{x}_J(t_1)|,\quad r_{1J}=|\boldsymbol{x}_1(t_1)-\boldsymbol{x}_J(t_1)|$$

である．

さて，いま図より，

$$\mathrm{JH}^2=r_{2J}^2-(\boldsymbol{r}_{2J}\cdot\boldsymbol{n})^2=r_{1J}^2(\boldsymbol{r}_{1J}\cdot\boldsymbol{n})^2$$

加比の理から，

$$\begin{aligned} \frac{r_{2J}-\boldsymbol{r}_{2J}\cdot\boldsymbol{n}}{r_{1J}-\boldsymbol{r}_{1J}\cdot\boldsymbol{n}} &= \frac{r_{1J}-\boldsymbol{r}_{1J}\cdot\boldsymbol{n}}{r_{1J}-\boldsymbol{r}_{2J}\cdot\boldsymbol{n}} \\ &= \frac{r_{1J}+r_{2J}+\boldsymbol{r}_{2J}\cdot\boldsymbol{n}-\boldsymbol{r}_{1J}\cdot\boldsymbol{n}}{r_{1J}+r_{2J}+\boldsymbol{r}_{1J}\cdot\boldsymbol{n}-\boldsymbol{r}_{2J}\cdot\boldsymbol{n}} \\ &= \frac{r_{1J}+r_{2J}+r_{12}}{r_{1J}+r_{2J}-r_{12}} \end{aligned} \tag{233}$$

[17] $\boldsymbol{n}_1^2\sim1$ およびベクトル公式，

$$(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{a}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}$$

を用いた．

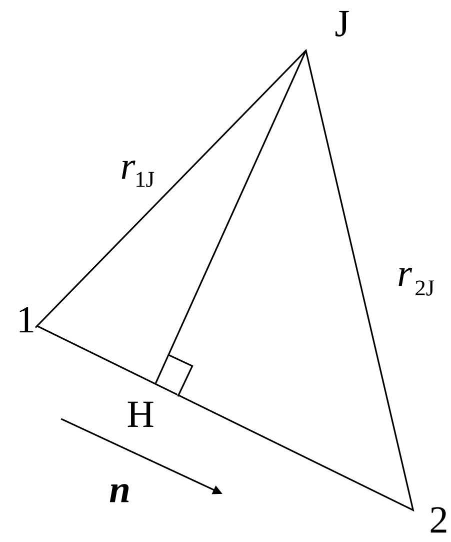



Figure 18: 光行差

となる．ここで，

$$\boldsymbol{r}_{1J}\cdot\boldsymbol{n}-\boldsymbol{r}_{2J}\cdot\boldsymbol{n}=\boldsymbol{r}_{21}\cdot\boldsymbol{n}=r_{21}$$

を用いた．これより光行差方程式は

$$c(t_2-t_1)=r_{21}+(1+\gamma)\sum_J\frac{GM_J}{c^2}\ln\left|\frac{r_{1J}+r_{2J}+r_{12}}{r_{1J}+r_{2J}-r_{12}}\right| \tag{234}$$

となる．

### 2.3.2　天体の縁を通過する光

いま，線分 12 までの距離 (impact parameter) を $b$ とすると，

$$r_{21}=\sqrt{r_{1J}^2-b^2}+\sqrt{r_{2J}^2-b^2}$$

いま，$r_{1J},r_{2J}\gg b$ とすると，

$$\sqrt{r_{1J}^2-b^2}=r_{1J}\sqrt{1-\left(\frac{b}{r_{1J}}\right)^2}\sim r_{1J}-\frac{b^2}{2r_{1J}}$$

を用いて（添字 2 についても同様），ln の中身は，

$$\frac{r_{1J}+r_{2J}+\sqrt{r_{1J}^2-b^2}+\sqrt{r_{2J}^2-b^2}}{r_{1J}+r_{2J}-\sqrt{r_{1J}^2-b^2}-\sqrt{r_{2J}^2-b^2}}\cong\frac{2(r_{1J}+r_{2J})}{\frac{b^2}{2r_{1J}}+\frac{b^2}{2r_{2J}}}\sim\frac{4r_{1J}r_{2J}}{b^2} \tag{235}$$

となる．これから，

$$c\Delta_J t \;=\; (1+\gamma)\frac{GM_J}{c^2}\ln\left(\frac{4r_{1J}r_{2J}}{b^2}\right)$$

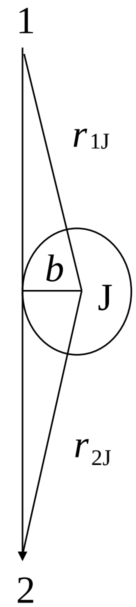



Figure 19: 天体の縁を通過する光

$$
\begin{aligned}
&= (1+\gamma)\frac{GM_J}{c^2}\left(\ln 4 + \ln\frac{r_{1J}}{b} + \ln\frac{r_{2J}}{b}\right) \\
&= (1+\gamma)\frac{GM_J}{c^2}\left(1.39 + \ln\frac{r_{1J}}{b} + \ln\frac{r_{2J}}{b}\right) \qquad (236)
\end{aligned}
$$

を得る．例として太陽の縁を通過して来る光を考えると，$b_{\text{min}} = R_\odot = 6.96 \times 10^8\text{m}$，天体2を地球，天体1を金星とすると，

$$
\begin{aligned}
&r_{2J} \sim 1\text{AU} = 1.50 \times 10^{11}\text{m}, \quad \ln\frac{r_{2J}}{R_\odot} \sim 5.39 \\
&r_{1J} \sim 0.72\text{AU} = 1.08 \times 10^{11}\text{m}, \quad \ln\frac{r_{1J}}{R_\odot} \sim 5.05 \\
&\frac{GM_\odot}{c^2} \sim 1476\text{m}
\end{aligned}
$$

したがって

$$
c\Delta_\odot \cong 2 \times 1476 \times (1.30 + 5.37 + 5.05) \sim 34.86\text{km} \qquad (237)
$$

往復で 0.23 ms 遅れる[18]．

### 2.3.3 光行差方程式の解法

光行差方程式

$$
c(t_2 - t_1) = r_{21} + (1+\gamma)\sum_J \frac{GM_J}{c^2}\left|\frac{r_{1J}+r_{2J}+r_{21}}{r_{1J}+r_{2J}-r_{21}}\right| \qquad (238)
$$

[18] 1 ns = 30 cm，1$\mu$s = 300 m，1 ms = 300 km である．

$$r_{21} = |\boldsymbol{x}_2(t_2) - \boldsymbol{x}_1(t_1)|$$

において $t_2, \boldsymbol{x}_1(t), \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_J$ が与えられたとき，$t_1$ を求める（視位置（光方向）を求めるのに必要）．

Newton-Raphson 法

$$\begin{aligned}
t_1^{(0)} &= t_2 \\
t_1^{(1)} &= t^{(0)} - \frac{c(t_2 - t_1^{(0)})r_{21}}{c + \boldsymbol{v}_1^{(0)} \cdot \hat{\boldsymbol{r}}_{21}^{(0)}} \\
&- t_2 - \frac{|\boldsymbol{x}_2(t_2) - \boldsymbol{x}_1(t_2)|}{c + \boldsymbol{v}_1(t_2) \cdot \frac{\boldsymbol{x}_1(t_2) - \boldsymbol{x}_2(t_2)}{|\boldsymbol{x}_2(t_2) - \boldsymbol{x}_1(t_2)|}} \\
&= t_2 - \frac{r_{12}^{(0)2}}{cr_{12}^{(0)} + \boldsymbol{v}_1(t_2) \cdot \{\boldsymbol{x}_1(t_2) - \boldsymbol{x}_2(t_2)\}} \qquad (239) \\
t_1^{(2)} &- t_1^{(1)} - \frac{c(t_2 - t_1^{(1)}) - r_{12}^{(1)} - (1+\gamma)\sum_J \frac{GM_J}{c^2} \left| \frac{r_{1J} + r_{2J} + r_{21}}{r_{1J} + r_{2J} - r_{21}} \right|}{c + \boldsymbol{v}_1(t_1^{(1)}) \cdot \boldsymbol{r}_{12}^{(1)}} \qquad (240)
\end{aligned}$$

$t_1^{(2)}$ はポスト・ガリレイ近似のオーダーで正しい．

### 2.3.4　光方向（視位置）

$\boldsymbol{x}_2$ での光の到達方向，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{d}_{12} &= -\frac{\boldsymbol{v}_2}{|\boldsymbol{v}_2|} \qquad (241) \\
\boldsymbol{v}_1 &= c\boldsymbol{n}_1 \qquad (242) \\
\boldsymbol{v}_2 &= \boldsymbol{v}_1 + (1+\gamma)\left[\Delta\boldsymbol{v} - 2(\boldsymbol{b}_1 \cdot \Delta\boldsymbol{v})\boldsymbol{n}_1\right] \qquad (243) \\
\Delta\boldsymbol{v} &= \sum_J \frac{GM_J}{c^2} \frac{\boldsymbol{s}_{1J}}{s_{1J}^2} \left( \frac{\boldsymbol{r}_{2J}}{r_{2J}} - \frac{\boldsymbol{r}_{1J}}{r_{1J}} \right) \qquad (244)
\end{aligned}$$

これより，

$$\begin{aligned}
|\boldsymbol{v}_2|^2 &= \boldsymbol{v}_1^2 + 2\boldsymbol{v}_1(1+\gamma)\left[\Delta\boldsymbol{v} - 2(\boldsymbol{b}_1 \cdot \Delta\boldsymbol{v})\boldsymbol{n}_1\right] + (1+\gamma)^2\left[\Delta\boldsymbol{v} - 2(\boldsymbol{b}_1 \cdot \Delta\boldsymbol{v})\boldsymbol{n}_1\right]^2 \\
&\cong v_1^2 + 2(1+\gamma)\left\{\boldsymbol{v}_1 \cdot \Delta\boldsymbol{v} - 2(\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{n})(\boldsymbol{n} \cdot \Delta\boldsymbol{v})\right\} \\
&- v_1^2 + 2(1+\gamma)\boldsymbol{v}_1 \cdot \Delta\boldsymbol{v}(1 - 2n^2) \\
&\simeq v_1^2 - 2(1+\gamma)\boldsymbol{v}_1 \cdot \Delta\boldsymbol{v}, \quad \left( n^2 \sim \frac{\boldsymbol{v}_1^2}{c^2} \sim 1 + O\left(\frac{\boldsymbol{v}_1}{c}\right) \right) \\
v_2 &\simeq v_1 - (1+\gamma)\boldsymbol{v}_1 \cdot \Delta\boldsymbol{v} \qquad (245)
\end{aligned}$$

これを用いて，

$$-\boldsymbol{d}_{12} = \frac{\boldsymbol{v}_2}{v_2} = \frac{\boldsymbol{v}_1 + (1+\gamma)[\Delta\boldsymbol{v} - 2(\boldsymbol{n}_1 \cdot \Delta\boldsymbol{v})\boldsymbol{n}_1}{v_1 - (1+\gamma)\boldsymbol{n}_1 \cdot \Delta\boldsymbol{v}}$$

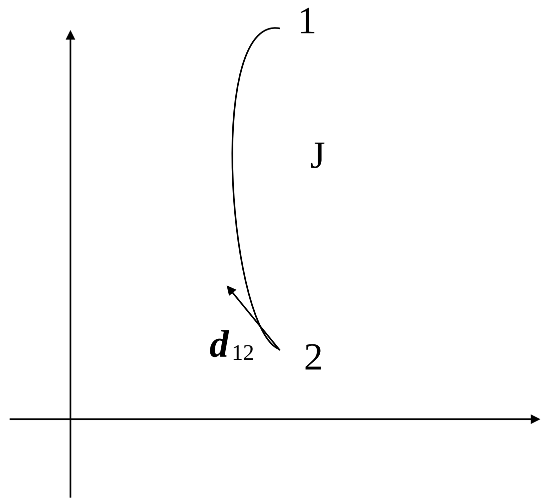



Figure 20: 光方向（視位置）

$$\begin{aligned}
&\cong \frac{\boldsymbol{v}_1}{v_1} + (1+\gamma)\left\{\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{v_1} - 2\left(\boldsymbol{n}_1\cdot\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{c}\right)\boldsymbol{n}_1\right\} + (1+\gamma)\frac{\boldsymbol{n}_1\cdot\Delta\boldsymbol{v}}{v_1^2}\cdot\boldsymbol{v}_1 \\
&\cong \frac{\boldsymbol{v}_1}{v_1} + (1+\gamma)\left\{\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{c} - \left(\boldsymbol{n}_1\cdot\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{c}\right)\boldsymbol{n}_1\right\}, \quad \left(\boldsymbol{v}_1\sim c, \quad \frac{\boldsymbol{v}_1}{v_1}\sim\boldsymbol{n}_1+\cdots\right) \\
&\cong \frac{\boldsymbol{v}_1}{v_1} + (1+\gamma)\boldsymbol{n}_1\times\left(\frac{\Delta\boldsymbol{v}}{c}\times\boldsymbol{n}_1\right) \qquad (246)
\end{aligned}$$

となる[19]．一方，

$$-\boldsymbol{r}_{12} = \boldsymbol{r}_{21} = \boldsymbol{x}_2 - \boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{v}_1(t_2-t_1) + (1+\gamma)[\Delta\boldsymbol{x} - 2(\boldsymbol{n}_1\cdot\Delta\boldsymbol{x})\boldsymbol{n}_1] \qquad (248)$$

より，同様にして，

$$-\frac{\boldsymbol{r}_{12}}{r_{12}} = \frac{\boldsymbol{v}_1}{v_1} + (1+\gamma)\boldsymbol{n}_1\cdot\left(\frac{\Delta\boldsymbol{x}}{r_{12}}\times\boldsymbol{n}_1\right) \qquad (249)$$

両辺を見比べて，

$$\boldsymbol{d}_{12} = \frac{\boldsymbol{r}_{12}}{r_{12}} + (1+\gamma)\boldsymbol{n}_1\times\left(\frac{\delta\boldsymbol{x}}{r_{12}} - \frac{\Delta\boldsymbol{v}}{c}\right)\times\boldsymbol{n}_1 \qquad (250)$$

ここで，

$$\begin{aligned}
\Delta\boldsymbol{v} &= \sum_J \frac{GM_J}{c}\frac{\boldsymbol{s}_{1J}}{|s_{1J}|^2}\times\left(\frac{\boldsymbol{r}_{2J}}{r_{2J}} - \frac{\boldsymbol{r}_{1J}}{r_{1J}}\right) \\
\Delta\boldsymbol{x} &= \sum_J \frac{GM_J}{c^2}\frac{\boldsymbol{s}_{1J}}{|\boldsymbol{s}_{1J}|^2}\times\left[(r_{2J}-r_{1J})\boldsymbol{n}_1 + \boldsymbol{n})_1\times\boldsymbol{s}_{1J}\ln\left|\frac{r_{1J}+r_{2J}+r_{21}}{r_{1J}+r_{2J}-r_{21}}\right| - \frac{\boldsymbol{r}_{12}}{r_{12}}c(t_2-t_1)\right]
\end{aligned}$$

[19] 最後の式変形でベクトル公式，

$$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c} = (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})\boldsymbol{c} - (\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b} = \boldsymbol{c}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}) \qquad (247)$$

を用いた．

より，

$$\left(\frac{\Delta \boldsymbol{x}}{r_{12}}-\frac{\Delta \boldsymbol{v}}{c}\right)\times \boldsymbol{n}_1 = \sum_J \frac{GM_J}{c^2}\frac{\boldsymbol{s}_{1J}}{|s_{1J}|^2}\times\left[\frac{r_{2J}-r_{1J}}{r_{12}}\boldsymbol{n}_1+\frac{\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{s}_{1J}}{r_{12}}\ln\left|\frac{r_{1J}+r_{2J}+r_{21}}{r_{1J}+r_{2J}-r_{21}}\right| -\frac{\boldsymbol{r}_{1J}}{r_{1J}}\frac{c(t_2-t_1)}{r_{12}}-\frac{\boldsymbol{r}_{1J}}{r_{1J}}+\frac{\boldsymbol{r}_{2J}}{r_{2J}}\right]\times\boldsymbol{n}_1$$
$$\simeq \sum_J \frac{GM_J}{c^2}\frac{\boldsymbol{s}_{1J}}{|s_{1J}|^2}\times\left[\frac{r_{2J}-r_{1J}}{r_{12}}\boldsymbol{n}_1 +\frac{\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{s}_{1J}}{r_{12}}\ln\left|\frac{r_{1J}+r_{2J}+r_{21}}{r_{1J}+r_{2J}-r_{21}}\right|-\frac{\boldsymbol{r}_{1J}}{r_{1J}}\right]\times\boldsymbol{n}_1$$
$$\left(c(t_2-t_1)=r_{12}+O\left(\frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2}\right)\quad \text{より}\right) \tag{251}$$

ここで，

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{s}_{1J}=\boldsymbol{r}_{1J}\times\boldsymbol{n}_1\\
&(\boldsymbol{s}_{1J}\times\boldsymbol{n}_1)\times\boldsymbol{s}_{1J}=\{(\boldsymbol{r}_{1J}\cdot\boldsymbol{n}_1)\boldsymbol{n}_1-\boldsymbol{r}_{1J}\}\times\boldsymbol{n}_1=-\boldsymbol{s}_{1J}\\
&\{\boldsymbol{s}_{1J}\times(\boldsymbol{b}_1\times\boldsymbol{s}_{1J})\}\times\boldsymbol{s}_{1J}=\left\{\boldsymbol{s}_{1J}^2\boldsymbol{n}_1-(\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{s}_{1J})\boldsymbol{s}_{1J}\right\}\times\boldsymbol{n}_1=s_{1J}^2\boldsymbol{n}_1\times\boldsymbol{n}_1=0\\
&(\boldsymbol{s}_{1J}\times\boldsymbol{r}_{2J})\times\boldsymbol{n}_1=\{(\boldsymbol{r}_{1J}\times\boldsymbol{n}_1)\times\boldsymbol{r}_{2J}\}\times\boldsymbol{n}_1\\
&=\{(\boldsymbol{r}_{1J}\cdot\boldsymbol{r}_{2J})\boldsymbol{n}_1-(\boldsymbol{r}_{2J}\cdot\boldsymbol{n}_1)\boldsymbol{r}_{1J}\}\times\boldsymbol{n}_1=-(\boldsymbol{r}_{2J}\cdot\boldsymbol{n}_1)\boldsymbol{s}_{1J}
\end{aligned}$$

等を用いると，

$$\text{与式}=\sum_J\frac{GM_J}{c^2}\left(\frac{r_{2J}-r_{1J}}{r_{12}}-\frac{\boldsymbol{r}_{2J}\cdot\boldsymbol{n}_1}{r_{2J}}\right)\cdot\left(-\frac{\boldsymbol{s}_{1J}}{s_{1J}^2}\right)$$

さらにここで，

$$\boldsymbol{n}_1\sim\frac{\boldsymbol{r}_{12}}{r_{12}},\quad \boldsymbol{r}_{12}\sim\boldsymbol{r}_{2J}$$

より，

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{s}_{1J}&=\boldsymbol{r}_{1J}\times\boldsymbol{n}_1\cong-\boldsymbol{r}_{1J}\times\frac{\boldsymbol{r}_{2J}}{r_{12}}\\
s_{1J}^2&\cong\frac{1}{r_{12}^2}|\boldsymbol{r}_{1J}\times\boldsymbol{r}_{2J}|^2=\frac{r_{1J}^2r_{2J}^2-(\boldsymbol{r}_{1J}\cdot\boldsymbol{r}_{2J})^2}{r_{12}^2}
\end{aligned}$$

これらを用いると，

$$\begin{aligned}
&-\frac{\boldsymbol{s}_{1J}}{s_{1J}^2}\left(\frac{r_{2J}-r_{1J}}{r_{12}}-\frac{\boldsymbol{r}_{1J}\cdot\boldsymbol{r}_{2J}}{r_{12}r_{2J}}\right)\\
\sim\ &\frac{r_{12}^2}{r_{1J}^2r_{2J}^2-(\boldsymbol{r}_{1J}\cdot\boldsymbol{r}_{2J})^2}\left(\frac{r_{2J}-r_{1J}}{r_{12}}+\frac{\boldsymbol{r}_{12}\cdot\boldsymbol{r}_{2J}}{r_{12}r_{2J}}\right)\left(-\frac{\boldsymbol{r}_{1J}\times\boldsymbol{r}_{2J}}{r_{12}}\right)\\
\sim\ &\frac{1}{r_{1J}^2r_{2J}^2-(\boldsymbol{r}_{1J}\cdot\boldsymbol{r}_{2J})^2}\left(r_{2J}-r_{1J}\frac{\boldsymbol{r}_{1J}\cdot\boldsymbol{r}_{2J}}{r_{2J}}-r_{2J}\right)(-\boldsymbol{r}_{1J}\times\boldsymbol{r}_{2J})\\
\sim\ &\frac{1}{r_{2J}}\frac{r_{1J}r_{2J}-\boldsymbol{r}_{1J}\cdot\boldsymbol{r}_{2J}}{r_{1J}^2r_{2J}^2-(\boldsymbol{r}_{1J}\cdot\boldsymbol{r}_{2J})^2}(\boldsymbol{r}_{1J}\times\boldsymbol{r}_{2J})=\frac{1}{r_{2J}}\frac{\boldsymbol{r}_{1J}\times\boldsymbol{r}_{2J}}{r_{1J}r_{2J}+\boldsymbol{r}_{1J}\cdot\boldsymbol{r}_{2J}}
\end{aligned}$$

となり，結局，

$$\boldsymbol{d}_{12} = \frac{\boldsymbol{r}_{12}}{r_{12}} + \left[(1+\gamma)\sum_J \frac{GM_J}{c^2}\frac{1}{r_{2J}}\frac{\frac{\boldsymbol{r}_{1J}}{r_{1J}} \times \frac{\boldsymbol{r}_{2J}}{r_{2J}}}{1+\frac{\boldsymbol{r}_{1J}}{r_{1J}} \times \frac{\boldsymbol{r}_{2J}}{r_{2J}}}\right] \times \frac{\boldsymbol{r}_{12}}{r_{12}} \tag{252}$$

これが有限距離（太陽系内など）の Equation of light deflection．もし，天体 1 が十分遠方なら，

$$\boldsymbol{k} = \frac{\boldsymbol{r}_{12}}{r_{12}} = \frac{\boldsymbol{r}_{1J}}{r_{1J}}$$

とおいて，

$$\boldsymbol{d}_2 = \boldsymbol{k} + \left[(1+\gamma)\sum_J \frac{GM_J}{c^2}\frac{1}{r_{2J}}\frac{\boldsymbol{k} \times \frac{\boldsymbol{r}_{2J}}{r_{2J}}}{1+\boldsymbol{k}\cdot\frac{\boldsymbol{r}_{2J}}{r_{2J}}}\right] \times \boldsymbol{k} \tag{253}$$

となる．

$$\left(\boldsymbol{k} \times \frac{\boldsymbol{r}_{2J}}{r_{2J}}\right) \times \boldsymbol{k} = \left(\frac{\boldsymbol{r}_{2J}}{r_{2J}}\cdot\boldsymbol{k}\right)\boldsymbol{k} - \frac{\boldsymbol{r}_{2J}}{r_{2J}}, \quad \frac{\boldsymbol{r}_{2J}}{r_{2J}}\cdot\boldsymbol{k} = -\cos\theta$$

より，

$$\begin{pmatrix} d_x \\ d_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \end{pmatrix} - (1+\gamma)\frac{GM_J}{c^2}\frac{1}{r_{2J}}\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\begin{pmatrix} -k_y \\ k_x \end{pmatrix}$$

ここで，

$$\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta} = \frac{2\cos\frac{\theta}{2}\sin\frac{\theta}{c}}{2\sin^{-2}\frac{\theta}{2}} = \cot\frac{\theta}{c}$$

より，

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} \cos\psi' \\ \sin\psi' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\psi \\ \sin\psi \end{pmatrix} - \frac{1+\gamma}{2}\frac{r_{gJ}}{r_{2J}}\cot\frac{\theta}{2}\begin{pmatrix} -\sin\psi \\ \cos\psi \end{pmatrix} \\
\psi' &= \psi - \frac{1+\gamma}{2}\frac{r_{gJ}}{r_{2J}}\cot\frac{\theta}{2} \\
&= \psi - \frac{1+\gamma}{2}\frac{r_{gJ}}{r_{2J}}\cot\frac{\psi-\varphi}{2}
\end{aligned} \tag{254}$$

ここで，

$$r_{gJ} = \frac{GM_J}{c^2}, \quad \psi + \theta = \varphi$$

太陽による無限遠の星に対する見かけの角度の変化は，

$$\Delta\theta = \frac{1+\gamma}{2}\frac{r_{gJ}}{r_{2J}}\cot\frac{\theta}{2} \tag{255}$$

となる．例えば太陽の場合，

$$\sin\theta_{\mathrm{min}} = \frac{R_\odot}{r_{2J}} \cong \frac{6.96\times10^8}{1.50\times10^{11}} \simeq 4.64.\times10^{-3}, \quad \theta_{\mathrm{min}} = 15'57''$$

これより，

$$\tan\frac{\theta_{\rm min}}{2} \sim \frac{1}{2}\sin\theta_{\rm min} \sim 2.32\times 10^{-3} \quad \Rightarrow \quad \cot\frac{\theta_{\rm min}}{2} \sim 4.31\times 10^{2}$$

$$\frac{r_{gJ}}{r_{2J}} \sim \frac{2.96\times 10^{3}}{1.50\times 10^{11}} \sim 1.96\times 10^{-9} \sim 4.08 \mathrm{mas}$$

したがって，

$$\Delta\theta_{\rm max} \sim \frac{1+\gamma}{2}\frac{r_{gJ}}{r_{2J}}\cot\frac{\theta_{\rm min}}{2} \cong 4.08\times 4.31\times 10^{2} \cong 1''.76$$

となる[20]．よって，重力レンズの公式として，

$$\Delta\theta \propto \cot\frac{\theta}{c} \tag{256}$$

となる．

[20] ここで，$1\mathrm{mas} = 0''.001 \cong 4.848\times 10^{-9}$ である．

## 2.4　ポスト・ニュートン近似

形式的にメトリックを，

$$\begin{cases} g_{00} = -1 + \frac{2\phi}{c^2} + \frac{2\psi}{c^4} \\ g_{0j} = 0 + \frac{\boldsymbol{g}}{c^3} \\ g_{ij} = \delta_{ij} + \frac{2\gamma\phi}{c^2}\delta_{ij} \end{cases} \tag{257}$$

と置く．$\psi, \boldsymbol{g}$ の具体的な形については後で考える．

### 2.4.1　$g^{\mu\nu}$ の計算

まず，運動方程式は形式的に，

$$\frac{dv^k}{dt} = -\underbrace{c^2\Gamma^k_{00}}_{O(\frac{1}{c^4})} + \underbrace{cv^k\Gamma^0_{00}}_{O(\frac{1}{c^3})} - \underbrace{2cv^j\Gamma^k_{0j}}_{O(\frac{1}{c^2})} + \underbrace{2cv^kv^j\Gamma^0_{0j}}_{O(\frac{1}{c^2})} - \underbrace{v^iv^j\Gamma^k_{ij}}_{O(\frac{1}{c^2})} + \underbrace{\frac{v^kv^iv^j}{c}\Gamma^0_{ij}}_{O(\frac{1}{c})} \tag{258}$$

となる．

$$g^{\mu\nu}g_{\nu\lambda} = \delta^{\mu\lambda}$$

より，明らかに，

$$\begin{cases} g^{00} = -1 - \frac{2\phi}{c^2} + \cdots \\ g^{0i} = -\frac{g_i}{c^3} \\ g^{ij} = \delta_{ij} - \frac{2\gamma\phi}{c^2}\delta_{ij} \end{cases} \tag{259}$$

### 2.4.2　$\Gamma^\mu_{\nu\lambda}$ の計算

まず，$\frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\lambda}$ を計算する．

$$\frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} = \frac{2\dot{\phi}}{c^3} + \cdots \quad (x^0 = ct) \tag{260}$$

$$\frac{\partial g_{0j}}{\partial x^0} = \frac{\dot{g}_j}{c^4} + \cdots \tag{261}$$

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^0} = \frac{2\gamma\dot{\phi}}{c^3}\delta_{ij} + \cdots \tag{262}$$

$$\frac{\partial g_{00}}{\partial x^k} = \frac{2a_k}{cc^2} - \frac{2b_k}{c^4} + \cdots \quad \left(a_k = \frac{\partial\phi}{\partial x^k}, \quad b_k = \frac{\partial\psi}{\partial x^k}\right) \tag{263}$$

$$\frac{\partial g_{0j}}{\partial x^k} = \frac{1}{c^3}\frac{\partial g_j}{\partial x^k} + \cdots \tag{264}$$

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \frac{2\gamma b_k}{c^2}\delta_{ij} + \cdots \tag{265}$$

これらより

$$\frac{1}{c^3} : \Gamma^0_{00} = \frac{1}{2}g^{0\mu}\left(2\frac{\partial g_{0\mu}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\mu}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\left[g^{00}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} + g^{0j}\left(2\frac{\partial g_{0j}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{0j}}{\partial x^0}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[(-1)\frac{2\dot{\phi}}{c^3} + \left(-\frac{g_j}{c^3}\right)\left(2\frac{2\dot{g}_j}{c^4} - \frac{2a_j}{c^2} - \frac{2b_j}{c^4}\right)\right] \\
&= -\frac{\dot{\phi}}{c^2} + O\left(\frac{1}{c^5}\right) \qquad (266) \\
\frac{1}{c^2} : \Gamma^0_{0j} &= \frac{1}{2}g^{0\mu}\left(\frac{\partial g_{0\mu}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j\mu}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{0j}}{\partial x^\mu}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial g_{00}}{\partial x^j} + g^{0l}\left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0l}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{0j}}{\partial x^l}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[(-1)\frac{2a_j}{c^2} + \left(-\frac{g_l}{c^3}\right)\left(\frac{2\gamma\dot{\phi}}{c^3}\delta_{lj} + \frac{1}{c^3}\left(\frac{\partial g_l}{\partial x^j} - \frac{\partial g_j}{\partial x^l}\right)\right)\right] \\
&= -\frac{a_j}{c^2} + O\left(\frac{1}{c^4}\right) \qquad (267) \\
\frac{1}{c} : \Gamma^0_{ij} &= \frac{1}{2}g^{0\mu}\left(\frac{\partial g_{i\mu}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{\mu j}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\mu}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[g^{00}\left(\frac{\partial g_{i0}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{0j}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^0}\right) + g^{0l}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[(-1)\left(\frac{1}{c^3}\left(\frac{\partial g_i}{\partial x^j} + \frac{\partial g_j}{\partial x^i}\right) - \frac{2\gamma\dot{\phi}}{c^3}\delta_{ij}\right) + \left(-\frac{g_l}{c^3}\right)\left(\frac{2\gamma a_j}{c^2}\delta_{il} + \frac{2\gamma a_i}{c^2}\delta_{lj} - \frac{2\gamma a_l}{c^2}\delta_{ij}\right)\right] \\
&= O\left(\frac{1}{c^4}\right) \qquad (268) \\
\frac{1}{c^4} : \Gamma^l_{00} &= \frac{1}{2}g^{k\mu}\left(2\frac{\partial g_{0\mu}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{00}}{\partial x^\mu}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[g^{k0}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^0} + g^{kj}\left(2\frac{\partial g_{0j}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^j}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(-\frac{g_k}{c^3}\right)\frac{2\dot{\phi}}{c^3} + \delta_{kj}\left(1 - \frac{2\gamma\phi}{c^2}\right)\left(2\frac{\dot{\phi}}{c^4} - \frac{2a_j}{c^2} - \frac{2b_j}{c^4}\right)\right] \\
&= -\frac{a_k}{c^2} - \frac{1}{c^4}\left[b_k - 2\gamma\phi a_k - \dot{g}_k\right] + O\left(\frac{1}{c^6}\right) \qquad (269) \\
\frac{1}{c^3} : \Gamma^k_{0j} &= \frac{1}{2}g^{k\mu}\left(\frac{\partial g_{0\mu}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{j\mu}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{0j}}{\partial x^\mu}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[g^{k0}\frac{\partial g_{00}}{\partial x^j} + g^{kl}\left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x^0} + \frac{\partial g_{0l}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{0j}}{\partial x^l}\right)\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\left(-\frac{g_k}{c^3}\right)\frac{2a_k}{c^2} + \delta^{kl}\left(\frac{2\gamma\dot{\phi}}{c^3}\delta_{lj} + \frac{1}{c^3}\left(\frac{\partial g_l}{\partial x^j} - \frac{\partial g_j}{\partial x^l}\right)\right)\right] \\
&= \frac{1}{c^3}\left[\gamma\dot{\phi}\delta_{kj} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial g_l}{\partial x^j} - \frac{\partial g_j}{\partial x^l}\right)\right] + O\left(\frac{1}{c^5}\right) \qquad (270) \\
\frac{1}{c^2} : \Gamma^k_{ij} &= \frac{1}{2}g^{k\mu}\left(\frac{\partial g_{i\mu}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{\mu j}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\mu}\right) \\
&= \frac{1}{2}\left[g^{k0}\left(\frac{\partial g_{i0}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{0j}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^0}\right) + g^{kl}\left(\frac{\partial g_{il}}{\partial x^j} + \frac{\partial g_{lj}}{\partial x^i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^l}\right)\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\left[-\frac{g_k}{c^3}\left(\frac{1}{c^3}\left(\frac{\partial g_i}{\partial x^j}+\frac{\partial g_j}{\partial x^i}\right)-\frac{2\gamma\dot{\phi}}{c^3}\delta_{ij}\right)+\delta^{kl}\frac{2\gamma}{c^2}\left(a_j\delta^{il}+a_i\delta^{lj}-a_l\delta^{ij}\right)\right] \\
&= \frac{\gamma}{c^2}\left(a_j\delta^{ik}+a_i\delta^{kj}-a_k\delta^{ij}\right)
\end{aligned} \tag{271}
$$

これより，運動方程式は，

$$
\begin{aligned}
\frac{dv^k}{dt} &= -c^2\Gamma^k_{00}+cv^k\Gamma^0_{00}-2cv^i\Gamma^k_{0i}-v^iv^j\Gamma^k_ij+\frac{1}{c}v^kv^iv^j\Gamma^0_{ij} \\
&= -c^2\left(-\frac{a_k}{c^2}-\frac{1}{c^4}\left(b_k-2\gamma\phi a_k-\dot{g}_k\right)\right) \\
&\quad +cv^k\left(-\frac{\dot{\phi}}{c^3}\right)-2cv^i\left[\frac{1}{c^3}\gamma\dot{\phi}\delta_{ki}+\frac{1}{2c^3}\left(\frac{\partial g_k}{\partial x^i}-\frac{\partial g_i}{\partial x^k}\right)\right] \\
&\quad +2v^kv^i\left(-\frac{a_i}{c^2}\right)-v^iv^j\frac{\gamma}{c^2}\left(a_j\delta_{ik}+a_i\delta_{jk}-a_k\delta_{ij}\right) \\
&= a_k+\frac{1}{c^2}\Big[b_k-2\gamma\phi a_k-\dot{g}_k-v^k\dot{\phi}-2\gamma\dot{\phi}v^k \\
&\quad -v^i\left(\frac{\partial g_k}{\partial x^i}-\frac{\partial g_i}{\partial x^k}\right)-2v^kv^ia_k2\gamma v^kv^ja_j-\gamma v^iv^ia_k\Big] \\
&= a_k+\frac{1}{c^2}\left[b_k+\gamma(\boldsymbol{v}^2-2\phi)a_k-\dot{g}_k-(1+2\gamma)\dot{\phi}v^k-2(1+\gamma)(v^ia_i)v^k+\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{v})\right]
\end{aligned} \tag{272}
$$

ベクトル形式で書くと，

$$
\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \boldsymbol{a}+\frac{1}{c^2}\left[\boldsymbol{b}+\gamma(\boldsymbol{v}^2-2\phi)\boldsymbol{a}-\dot{\boldsymbol{g}}-\left\{(1+2\gamma)\dot{\phi}+2(1+\gamma)(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{v}+\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{v})\right\}\right] \tag{273}
$$

$$
\boldsymbol{a}=\nabla\phi,\quad \boldsymbol{b}=\nabla\psi,\quad (\boldsymbol{g})_i=c^3g_{0i} \tag{274}
$$

### 2.4.3 $\phi$ ? $\boldsymbol{g}$ ?

Fully PPN （標準 PPN ゲージ）

$$
\begin{aligned}
\psi &= -\beta\phi^2-\xi\phi_w+\frac{1}{2}(2\gamma+2+\alpha_3+\zeta_1-2\xi)\phi_1 \\
&\quad (3\gamma-2\beta+1+\zeta_2+\xi)\phi_2+(1+\zeta_3)\phi_3 \\
&\quad +(3\gamma+3\zeta_4-2\xi)\phi_4-\frac{1}{2}(\zeta_1-2\xi)\mathcal{A}
\end{aligned} \tag{275}
$$

$$
\boldsymbol{g} = -\frac{1}{2}(4\gamma+3+\alpha_1-\alpha_2+\zeta_1-2\xi)\boldsymbol{V}-\frac{1}{2}(1+\alpha_2-\zeta_1+2\xi)\boldsymbol{W} \tag{276}
$$

ここで，

$$
\phi_w = \int\rho'\rho''\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}\cdot\left(\frac{\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}''}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}''|}-\frac{\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}''}{|\boldsymbol{x}'-\boldsymbol{x}''|}\right)d^3x'd^3x'' \tag{277}
$$

$$
\phi_1 = \int d^3x\frac{\rho'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x\prime}|}\boldsymbol{v}'^2 \tag{278}
$$

$$
\phi_2 = \int d^3x\frac{\rho'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\phi',\quad \phi'=\phi(\boldsymbol{x}') \tag{279}
$$

$$
\phi_3 = \int d^3\frac{\phi'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\Pi,\quad \Pi=\text{internal energy} \tag{280}
$$

$$\phi_4 = \int d^3x \frac{\rho'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} p'. \quad p' = \text{pressure} \tag{281}$$

$$\mathcal{A} = \int d^3x' \frac{\rho' \{\boldsymbol{v}' \cdot (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\}^2}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}, \quad \left( \mathcal{B} = \int d^3x' \frac{\rho' \boldsymbol{a}' \cdot (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}, \quad \boldsymbol{a}' = \frac{d\boldsymbol{v}'}{dt} \right) \tag{282}$$

$$\boldsymbol{V} = \int d^3x' \frac{\rho'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} \boldsymbol{v}' \tag{283}$$

$$\boldsymbol{W} = \int d^3x' \frac{\rho' \boldsymbol{v}' \cdot (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}') \tag{284}$$

ここで各パラメータは,

| | major term | notion | meanings | GTR | B-D |
|---|---|---|---|---|---|
| $\gamma$ | | | space curvature | 1 | $\frac{1+\omega}{2+\omega}$ |
| $\beta$ | $\phi^2$ | | non-linearity | 1 | 1 |
| $\xi$ | $\phi_w$ | Whitehead | | 0 | 0 |
| $\alpha_1$ | $\boldsymbol{V}$ | | | 0 | 0 |
| $\alpha_2$ | $\boldsymbol{W}$ | | | 0 | 0 |
| $\alpha_3$ | $\phi_1$ | | | 0 | 0 |
| $\zeta_1$ | $\mathcal{A}$ | | | 0 | 0 |
| $\zeta_2$ | $\phi_2$ | | | 0 | 0 |
| $\zeta_3$ | $\phi_3$ | | | 0 | 0 |
| $\zeta_4$ | $\phi_4$ | | | 0 | 0 |

### 2.4.4 準アインシュタイン

PPN パラメータの中で $\beta, \gamma$ だけ残す．このとき,

$$\psi = -\beta\phi^2 + (\gamma+1)\phi_1 + (3\gamma - 2\beta + 1)\phi_2 + \phi_3 + 3\gamma\phi_4 \tag{285}$$

$$\boldsymbol{g} = -\frac{1}{2}(4\gamma+3)\boldsymbol{V} - \frac{1}{2}\boldsymbol{W} \tag{286}$$

EIH ゲージ変換

$$x_0 \to \tilde{x}_0 = x_0 + \frac{1}{2c^2}\frac{\partial \chi}{\partial x^0} \tag{287}$$

$$x_i \to \tilde{x}_i = x_i \tag{288}$$

$$\chi(x) = \int d^3x' \rho' |\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'| \quad \text{(Superpotential)} \tag{289}$$

すると,

$$\frac{\partial \tilde{x}^0}{\partial x^0} = 1 + \frac{1}{2c^2}\frac{\partial^2 \chi}{(\partial x^0)^2}$$

$$
\begin{aligned}
&= 1-\frac{1}{2c^4}(\mathcal{A}+\mathcal{B}-\phi_1) && (290)\\
&\quad\left(\frac{\partial x^0}{\partial \tilde{x}^0}\sim 1+\frac{1}{2c^2}(\mathcal{A}+\mathcal{B}-\phi_1)\right)\\
\frac{\partial \tilde{x}^0}{\partial x^j} &= \frac{1}{2c^4}\frac{\partial \tilde{x}^0}{\partial x^j}\\
&= \frac{1}{2c^2}\left[\int d^3x'\rho'\frac{\boldsymbol{v}'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}-\int d^3x'\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\cdot\boldsymbol{v}'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\right]\\
&= \frac{1}{2c^2}(\boldsymbol{V}-\boldsymbol{W}) && (291)\\
&\quad\left(\frac{\partial x^0}{\partial \tilde{x}^j}=-\frac{1}{c^2}(\boldsymbol{V}-\boldsymbol{W})\right)\\
\frac{\partial\chi}{\partial x^0} &= \frac{1}{c}\int d^3x'\rho'\frac{d}{dx^0}|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|\\
&= -\frac{1}{c}\int d^3x'\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\cdot\boldsymbol{v}'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|} && (292)\\
\frac{\partial^2\chi}{(\partial x^0)^2} &= -\frac{1}{c^2}\int d^3x'\rho'\frac{d}{dt}\left[\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\cdot\boldsymbol{v}'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\right]\\
&= -\frac{1}{c^2}\int d^3x'\rho'\left[\frac{\{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\cdot\boldsymbol{v}'\}}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|^3}+\frac{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}')\cdot\boldsymbol{a}'}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}-\frac{\boldsymbol{v}'^2}{|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'|}\right]\\
&= -\frac{1}{c^2}(\mathcal{A}+\mathcal{B}-\phi_1) && (293)
\end{aligned}
$$

このとき

$$
g_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}=\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\tilde{\alpha}}}\frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\tilde{\beta}}}g_{\mu\nu} \tag{294}
$$

より[21]，

$$
\begin{aligned}
g_{\tilde{i}\tilde{j}} &= g_{ij} && (296)\\
g_{\tilde{0}\tilde{j}} &= g_{0j}-\frac{1}{2c^3}\boldsymbol{V}+\frac{1}{2^3}\boldsymbol{W} && (297)\\
g_{\tilde{0}\tilde{0}} &= g_{00}-\frac{1}{c^4}(\mathcal{A}+\mathcal{B}-\phi_1) && (298)
\end{aligned}
$$

結局，

$$
\begin{aligned}
\tilde{\psi} &= \psi-\frac{1}{2}(\mathcal{A}+\mathcal{B}-\phi_1)\\
&= -\beta\phi^2+\left(\gamma+\frac{3}{2}\right)\phi_1+(3\gamma-2\beta+1)\phi_2+\phi_3+3\gamma\phi_4-\frac{1}{2}(\mathcal{A}+\mathcal{B}) && (299)\\
\tilde{\boldsymbol{g}} &= \boldsymbol{g}-\frac{1}{2}\boldsymbol{V}+\frac{1}{2}\boldsymbol{W}\\
&= -(2\gamma+2)\boldsymbol{V} && (300)
\end{aligned}
$$

[21] このとき，

$$
E^\mu_{\tilde{\alpha}}=\begin{pmatrix} 1-\frac{1}{2c^2}(\mathcal{A}+\mathcal{B}-\phi_1) & -\frac{1}{2c^3}\boldsymbol{V}+\frac{1}{2c^3}\boldsymbol{W}\\ 0 & \mathbf{1}\end{pmatrix} \tag{295}
$$

となる．

### 2.4.5 静的孤立系

1. 静的 $\rightarrow \boldsymbol{v}' = 0, \boldsymbol{a}' = 0 \Rightarrow \phi_1 = \mathcal{A} = \mathcal{B} = 0, \boldsymbol{V} = \boldsymbol{W} = 0$
2. 孤立系 & $\boldsymbol{v}' \rightarrow \dot{\phi}' = \dot{\Pi}' = \dot{p}' = 0$ より，$\phi_2, \phi_3, \phi_4$ は $\phi$ に繰り込まれる．

このとき，

$$\tilde{\psi} = -\beta\phi^2 \tag{301}$$

$$\tilde{\boldsymbol{g}} = 0 \tag{302}$$

$$\boldsymbol{b} = -2\beta\phi\nabla\phi = -2\beta\phi\boldsymbol{a} \tag{303}$$

で[22]，

$$\dot{\phi} = 0 \tag{304}$$

より，運動方程式は，

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} &= \boldsymbol{a} + \frac{1}{c^2}\left[-2\beta\phi\boldsymbol{a} + \gamma(\boldsymbol{v}^2 - 2\phi)\boldsymbol{a} - 2(\gamma+1)(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{v}\right] \\ &= \boldsymbol{a} + \frac{1}{2}\left[\left\{\gamma\boldsymbol{v}^2 - (2\gamma + 2\beta)\phi\right\}\boldsymbol{a} - 2(\gamma+1)(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{v}\right] \end{aligned} \tag{305}$$

となる．

ここで質点近似をすると，

$$\boldsymbol{a} = -\frac{\mu\boldsymbol{r}}{r^3}, \quad \mu = GM, \quad \phi = \frac{\mu}{r} \tag{306}$$

となり[23]，

$$\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\frac{\mu\boldsymbol{r}}{r^3}\left[1 + \underbrace{\frac{1}{c^2}\left\{\gamma\boldsymbol{v}^2 - (2\gamma+2\beta)\frac{\mu}{r}\right\}}_{secularterm}\right] + \underbrace{\frac{2(1+\gamma)\mu}{c^2r^3}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{v}}_{periodicterm} \tag{307}$$

である[24]．実際，0 次近似で Kepler 運動だとすると，

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2 - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a}$$

[22] $\beta = 1$ なら Schwarzschild の外部解の PN 近似．

[23] 変数を

$$\boldsymbol{x} \rightarrow \boldsymbol{r} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_J$$

と変換した．

[24] 円運動のときは運動方程式の右辺は，

$$\begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}\left[1 + \underbrace{\text{const}}_{\text{見かけ上の質量の減少}}\right] + \underbrace{0}_{\propto e}$$

の形になる．

$$\boldsymbol{v}^2 = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a} \tag{308}$$

運動方程式の中かっこの部分は，

$$\left\{\gamma \boldsymbol{v^2} - (2\gamma + 2\beta)\frac{\mu}{r}\right\} = \gamma\left(\frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}\right) - (2\gamma + 2\beta)\frac{\mu}{r} = -2\beta\frac{\mu}{r} - \gamma\frac{\mu}{a} \tag{309}$$

円運動なら $r = a$ より，

$$\sim -(2\beta + \gamma)\frac{\mu}{a} \sim -3\frac{\mu}{a} \tag{310}$$

を得る[25]．

### 2.4.6 近点の移動

$\boldsymbol{r}, \boldsymbol{v}$ に対する摂動論で解を求めると，形式的に，

$$0\,次 \qquad \frac{d\boldsymbol{v}^{(0)}}{dt} = -\frac{\mu \boldsymbol{r}^{(0)}}{r^{(0)3}} \tag{311}$$

$$1\,次 \qquad \frac{d\boldsymbol{v}^{(1)}}{dt} = \cdot \tag{312}$$

$$\tag{313}$$

この方法は見通しが良くない．そこで，**要素変化法**を用いて，解を求める．いま，軌道要素 $E$ に対して，

$$0\,次 \qquad \frac{dE^{(0)}}{dt} = 0, \quad \boldsymbol{r}^{(0)} = \boldsymbol{r}(E^{(0)}; t) \tag{314}$$

$$1\,次 \qquad \frac{dE^{(1)}}{dt} = f(E^{(0)}; t) \tag{315}$$

$$\tag{316}$$

のように解を求める．

Kepler 要素[26]

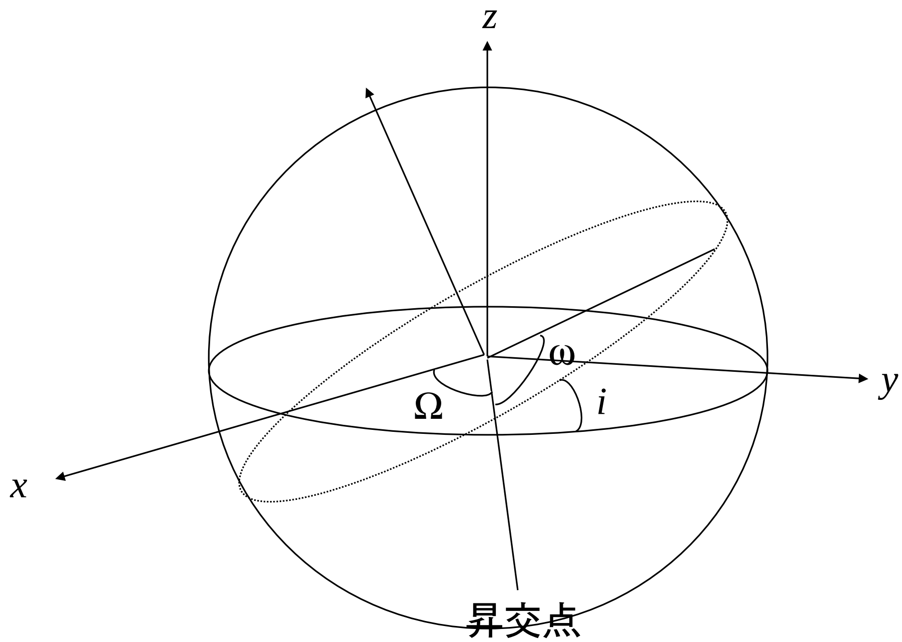
$$\begin{aligned}
&a : 軌道長半径\ (\text{Semi-major axis}) \\
&e : 軌道離心率\ (\text{Eccentricity}) \\
&\left.\begin{aligned} &i : 軌道傾斜角\ (\text{Inclination}) \\ &\Omega : 昇交点経度\ (\text{Longitude of ascending node}) \\ &\omega : 近点引数\ (\text{Longitude of pericenter}) \end{aligned}\right\}\ \text{Euler}\ 角 \\
&t_0 : 近点通過時刻\ (\text{Time of pericenter passage})
\end{aligned} \tag{317}$$

$t, E \to \boldsymbol{r}, \boldsymbol{v} \Rightarrow$ explicit には書けない．

解法：

[25] $-3\frac{\mu}{a}$ の大きさは，太陽重力の地球近傍で $3 \times 10^{-8}$，地球重力の地表近傍で $3 \times 10^{-10}$ 程度となる．

[26] 近日点は Perihelion，近地点は perigee，遠点は apocenter という．




1. $n = \sqrt{\mu/a^3}$：平均運動 (Mean motion)

2. $\ell = n(t - t_0)$：平均近点角 (Mean anomaly)

3. Kepler 方程式 $u - e\sin u = \ell$ を $u$ について解く.
   $u$：離心近点離角 (Eccentric anomaly)

4.
$$x_p = a(\cos u - e), \quad y_p = a\sqrt{1-e^2}\sin u$$

5. $r = a(1 - e\cos u)$

6. $\dot{u} = n/r$

7.
$$\dot{x}_p = -a\sin u \cdot \dot{u}, \quad \dot{y}_p = a\sqrt{1-e^2}\cos u \cdot \dot{u}$$

8.
$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{r} \\ \boldsymbol{v} \end{pmatrix} = R_x(-\Omega)R_x(-i)R_z(-\omega)\begin{pmatrix} x_p \\ y_p \\ 0 \\ \dot{x}_p \\ \dot{y}_p \\ 0 \end{pmatrix}$$

要素の変化式

- Lagrange 流
- Gauss 流：$\Delta \boldsymbol{a} = \Delta \boldsymbol{x}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{v}, t)$ given

Gauss 流

$$\begin{aligned} \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} &= -\frac{\mu \boldsymbol{r}}{r^3} + \Delta \boldsymbol{a} \qquad (318) \\ \Delta \boldsymbol{a} &= \frac{1}{c^2}\left[\left\{\gamma \boldsymbol{v}^2 - 2(\beta+\gamma)\frac{\mu}{r}\right\}\left(-\frac{\mu \boldsymbol{r}}{r^3}\right) + 2(1+\gamma)\left(\boldsymbol{v}\cdot\frac{\mu \boldsymbol{r}}{r^3}\right)\boldsymbol{v}\right] \\ &= \mathrm{S}\hat{\boldsymbol{r}} + \mathrm{T}(\hat{\boldsymbol{h}}\times\hat{\boldsymbol{r}}) + \mathrm{W}\hat{\boldsymbol{h}} \qquad (319) \end{aligned}$$

ここで，S, T ,W はそれぞれ，摂動力の動径方向，動径ベクトルと軌道角運動量ベクトルの外積方向（接線方向 $\hat{\boldsymbol{v}}$ ではない），軌道面方向を表す．このとき，軌道要素の変化式は，

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}}\left[\mathrm{S}e\sin f + \mathrm{T}\frac{a(1-e^2)}{r}\right] \qquad (320) \\ \frac{de}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na}\left[\mathrm{S}\sin f + \mathrm{T}(\cos f + \cos u)\right] \qquad (321) \\ \frac{di}{dt} &= \frac{1}{na\sqrt{1-e^2}}\mathrm{W}\frac{r}{a}\cos(\omega+f) \qquad (322) \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\cos i\frac{d\Omega}{dt} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae}\left[-\mathrm{S}\cos f + \mathrm{T}\left(1+\frac{r}{a(1-e^2)}\right)\sin f\right] \qquad (323) \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na\sqrt{1-e^2}}\frac{1}{\sin i}\mathrm{W}\frac{r}{a}\sin(\omega+f) \qquad (324) \\ \frac{d\ell_0}{dt} &= \sqrt{1-e^2}\left(\frac{d\omega}{dt} + \cos i\frac{d\Omega}{dt}\right) + \mathrm{S}\frac{2r}{na^2} \qquad (325) \end{aligned}$$

と書ける．ここで $f$ は真近点角であり，$x_p = r\cos f, y_p = r\sin f$ と表される．S, T, W は

$$\mathrm{S} = \Delta \boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{r}}, \quad \mathrm{T} = \Delta \boldsymbol{a}\cdot(\hat{\boldsymbol{h}}\times\hat{\boldsymbol{r}}), \quad \mathrm{W} = \Delta \boldsymbol{a}\cdot\hat{\boldsymbol{h}}, \quad \boldsymbol{h} = \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v} \qquad (326)$$

まず，

- $\mathrm{W} = 0 \rightarrow di/dt = d\Omega/dt = 0 \Rightarrow$ 軌道面の向きは不変
- $$\mathrm{S} = \frac{1}{c^2}\left[\left\{\gamma \boldsymbol{v}^2 - 2(\gamma+\beta)\frac{\mu}{r}\right\}\left(-\frac{\mu \boldsymbol{r}}{r^2}\right) + 2(\gamma+1)\frac{\mu}{r^4}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v})^2\right]$$
- $$\mathrm{T} = 2(\gamma+1)\frac{1}{c^2}\frac{\mu}{r^3}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{b})\cdot\frac{\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}}{r}$$

となる[27]．ここで，

エネルギー積分：

$$\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2 - \frac{\mu}{r} = -\frac{\mu}{2a}, \quad \boldsymbol{v}^2 = \frac{2\mu}{r} - \frac{\mu}{a}$$

角運動量積分：

$$|\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{v}| = h = r^2\dot{f} = \text{一定} = \sqrt{\mu a(1-e^2)} = na^2\sqrt{1-r^2}, \quad \mu = n^2a^3$$

$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos f}$ より，

$$\dot{r} = \frac{a(1-e^2)}{(1+e\cos f)^2}e\sin f\dot{f} = \frac{r^2e}{a(1-e^2)}\sin f\dot{f} = \frac{nae}{\sqrt{1-e^2}}\sin f$$

これより，

$$\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v} = r\dot{r} = \frac{nae}{\sqrt{1-e^2}r\sin f}$$

これらから S，T を具体的に求めると，

$$\begin{aligned}
\mathrm{S} &= \frac{1}{c^2}\left[\left\{\gamma\left(\frac{2\mu}{r}-\frac{\mu}{c}\right) - 2(\gamma+\beta)\frac{\mu}{r}\right\}\left(-\frac{\mu}{r^2}\right) + \frac{2(1+\gamma)\mu}{r^4}\frac{n^2a^2r^2e^2\sin^2 f}{1-e^2}\right] \\
&= \frac{\mu}{c^2}\left[2\beta\frac{\mu}{r^2} + \gamma\frac{\mu}{ar^2} + 2(1+\gamma)\frac{\mu}{ar^2}\frac{e^2}{1-e^2}\sin^2 f\right] \\
&= \frac{\mu}{c^2}\frac{\mu}{a^3}\left[2\beta\left(\frac{a}{r}\right)^3 + \gamma\left(\frac{a}{r}\right)^2 + 2(1+\gamma)\left(\frac{a}{r}\right)^2\frac{e^2}{1-e^2}\sin^2 f\right] \\
&\qquad \left(\frac{a}{r} = \frac{1+e\cos f}{1-e^2} \quad \text{より}\right) \\
&= \frac{\mu}{c^2}\frac{\mu}{a^3(1-e^2)^3}(1+e\cos f)^2\left[2\beta(1+e\cos f) + \gamma(1-e^2) + 2(1-e^2)e^2\sin^2 f\right] \\
&= \frac{\mu}{c^2}\frac{\mu}{a^3(1-e^2)^3}(1+e\cos f)^2\left[(2\beta+\gamma) + (\gamma+2)e^2 + 2\beta e\cos f - 2(1+\gamma)e^2\sin^2 f\right] \\
&= \frac{\mu}{c^2}\frac{\mu}{a^3}\frac{1}{1-e^2}\left(\frac{a}{r}\right)^2\left[(2\beta+\gamma) + (\gamma+2)e^2 + 2\beta e\cos f - 2(1+\gamma)e^2\sin^2 f\right]
\end{aligned} \tag{327}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{T} &= \frac{\mu}{c^2}\frac{2(1+\gamma)}{r^3}\frac{nare}{\sqrt{q-e^2}}\frac{na^2\sqrt{1-e^2}}{r} \\
&= \frac{\mu}{c^2}\frac{\mu}{r^3}2(1+\gamma)e\sin f \\
&= \frac{\mu}{c^2}\frac{\mu}{a^3(1-e^2)^3}(1+e\cos f)^2\cdot 2(1+\gamma)e\sin f \\
&= \frac{\mu}{c^2}\frac{\mu}{a^3}\left(\frac{a}{r}\right)^2\frac{1+e\cos f}{1-e^2}\cdot 2(1+\gamma)e\sin f
\end{aligned} \tag{328}$$

ここで，角運動量から，

$$r^2\dot{f} = na^2\sqrt{1-e^2} \quad dt = \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{r}{a}\right)^2 df \tag{329}$$

[27] $\boldsymbol{v}\cdot(\hat{\boldsymbol{h}}\times\hat{\boldsymbol{r}}) = \hat{\boldsymbol{h}}\cdot(b\hat{d}r\times\boldsymbol{v}) = \frac{1}{r}(bd\hat{h}\cdot\boldsymbol{h}) = \frac{h}{r}$

となり，これを用いると，

$$\begin{aligned}
\frac{da}{df} = \frac{da}{dt}\frac{dt}{df} &= \frac{2}{n\sqrt{1-e^2}}\frac{\mu}{c^2}\frac{\mu}{a^3}\left(\frac{a}{r}\right)^2 \\
&\quad \times \left[\frac{e\sin f}{1-e^2}\left\{(2\beta+\gamma)+(\gamma+2)e^2+2\beta e\cos f-2(1+\gamma)e^2\sin^2 f\right\}\right. \\
&\quad \left. + \frac{1+e\cos f}{1-e^2}\cdot 2\gamma e\sin f(1-e^2)\right] \times \frac{1}{n\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{r}{a}\right)^2 \\
&\qquad \left(\frac{a}{r}(1-e^2) = 1+e\cos f\right) \\
&= \frac{2}{n^2(1-e^2)}\frac{\mu}{c^2}\frac{\mu}{a^3}\frac{1}{1-e^2} \\
&\quad \times \left[\left\{(2\beta+\gamma)+(\gamma+2)e^2+2\beta e\cos f-2(1+\gamma)e^2\sin^2 f\right\}e\sin f\right. \\
&\quad \left. + 2(1+\gamma)e\sin f(1+e\cos f)^2\right] \\
&= \frac{2\mu e}{c^2(1-e^2)}\left[\left\{(2\beta+\gamma)+(\gamma+2)e^2+2\beta e\cos f-2(1+\gamma)e^2\cos^2 f\right\}\sin f\right. \\
&\quad \left. +2(1+\gamma)(1+2e\cos f+e^2\cos^2 f)\sin f\right] \\
&= \frac{2\mu e}{c^2(1-e^2)^2}\left[(2+2\beta+3\gamma)\sin f+2(\gamma+2)\sin f+(4+2\beta+4\gamma)e\sin f\cos f\right] \\
&= \frac{2\mu e}{c^2(1-e^2)^2}\left[(2+2\beta+3\gamma)\sin f+2(\gamma+2)\sin f+(2+\beta+2\gamma)e\sin 2f\right] \qquad (330) \\
\Delta a &= a'-a \\
&= \frac{2\mu e}{c^2(1-e^2)^2}\left[-\left\{(2+2\beta+3\gamma)+(\gamma+2)e^2\right\}\cos f-\frac{1}{2}(2+\beta+2\gamma)e\cos 2f\right] \qquad (331)
\end{aligned}$$

次に，

$$\begin{aligned}
\frac{de}{df} = \frac{de}{dt}\frac{dt}{df} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na}\frac{\mu}{c^2}\frac{\mu}{a^3}\left(\frac{a}{r}\right)^2 \\
&\quad \times \left[\frac{\sin f}{1-e^2}\left\{(2\beta+\gamma)+(\gamma+2)e^2+2\beta e\cos f-2(1+\gamma)e^2\sin^2 f\right\}\right. \\
&\quad \left. + \frac{1+e\cos f}{1-e^2}\cdot 2(1+\gamma)e\sin f\left(\cos f+e+\frac{r}{a}\cos f\right)\right]\frac{1}{n\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{r}{a}\right)^2 \\
&= \frac{1}{n^2 a}\frac{\mu}{c^2}\frac{\mu}{a^3}\frac{\sin f}{1-e^2}\left[(2\beta+\gamma)+(\gamma+2)e^2+2\beta e\cos f\right. \\
&\quad \left. -2(\gamma+1)e^2\cos^2 f+2(1+\gamma)e\left\{(1+e\cos f)(\cos f+e)+(1-e^2)\cos f\right\}\right] \\
&= \frac{1}{a(1-e^2)}\frac{\mu}{c^2}\sin f\left[(2\beta+\gamma)+(\gamma+2)e^2+2\beta e\sin f-2(1+\gamma)e^2\cos^2 f\right. \\
&\quad \left. + 2(1+\gamma)e^2+4(1+\gamma)e-\cos f+2(1+\gamma)e^2\cos^2 f\right] \\
&= \frac{1}{a(1-e^2)}\frac{\mu}{c^2}\left[\left\{(2\beta+\gamma)+(4+3\gamma)e^2\right\}\sin f-\frac{1}{2}(2+\beta+2\gamma)e\sin 2f\right] \qquad (332) \\
\Delta e &= e'-e \\
&= \frac{\mu}{c^2 a(1-e^2)}\left[-\{(2\beta+\gamma)+(4+3\gamma)e^2\}\cos f-\frac{1}{2}(2+\beta+2\gamma)e\cos 2f\right] \qquad (333)
\end{aligned}$$

さらに，

$$\begin{aligned}
\frac{d\omega}{df}=\frac{d\omega}{dt}\frac{dt}{df} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae}\frac{\mu}{c^3}\frac{\mu}{a^3}\left(\frac{a}{r}\right)^2 \\
&\times\left[-\frac{\cos f}{1-e^2}\left\{(2\beta+\gamma)+(\gamma+2)e^2+2\beta e\cos f-2(1+\gamma)e^2\sin^2 f\right\}\right. \\
&\left.+\left(1+\frac{1}{1+e\cos f}\right)\sin f\cdot\frac{1+e\cos f}{1-e^2}\cdot 2(1+\gamma)e\sin f\right]\frac{1}{n\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{r}{a}\right)^2 \\
&= \frac{1}{n^2ae}\frac{\mu}{c^2}\frac{\mu}{a^2}\frac{1}{1-e^2}\left[-\cos f\left\{(2\beta+\gamma)+(\gamma+2)e^2+2\beta e\cos f-2(1+\gamma)e^2\sin^2 f\right\}\right. \\
&\left.+2(1+\gamma)e\sin^2 f(2+e\sin f)\right] \\
&= \frac{1\mu}{c^2ae(1-e^2)}\left[\left\{(2\beta+\gamma)+(2+\gamma)e^2+2\beta e\cos f-2(1+\gamma)e^2\cos^2 f\right\}(-\cos f)\right. \\
&\left.+2(1+\gamma)2e\underbrace{sin^2 f}_{1-\cos^2 f}+e^2\underbrace{\sin^2 f\cos f}_{\cos f-\cos^s f}\right] \\
[\quad] &= \left[-2\beta-\gamma-(\gamma+2)e^2+2(1+\gamma)e^2\right]\cos f \\
&+[-2\beta e-4(1+\gamma)e]\underbrace{\cos^2 f}_{\frac{1+\cos 2f}{2}}+\left[2(1+\gamma)e^2-2(1+\gamma)e^2\right]\cos^3 f+4(1+\gamma)e \\
&= (2+2\gamma-\beta)e+\left[-2\beta-\gamma+\gamma e^2\right]\cos f-e\left[2+2\gamma-\beta\right]\cos 2f
\end{aligned} \tag{334}$$

よって，

$$\begin{aligned}
\Delta\omega &= \omega'-\omega \\
&= \frac{\mu}{c^2ae(1-e^2)}\left[(2+2\gamma-\beta)ef+(-2\beta-\gamma+\gamma e^2)\sin f-\frac{1}{2}e(2+2\gamma\beta)\sin 2f\right]
\end{aligned} \tag{335}$$

ここで，一周期平均，

$$\langle f\rangle=0,\langle\sin f\rangle=0$$

より，

$$\langle\Delta\omega\rangle=\frac{\mu}{c^2a(1-e^2)}(2+2\gamma-\beta)\cdot 2\pi \tag{336}$$

ここで $\beta=\gamma=1$ のとき，

$$\frac{6\pi GM}{c^2a(1-e^2)}/\mathrm{Period}$$

ずつ近点が前進（＋）する．

最後に，

$$\frac{d\ell_0}{dt} = \sqrt{1-e^2}\frac{d\omega}{dt}\mathrm{S}\frac{2r}{na^2} \tag{337}$$

$$\mathrm{S}\frac{r}{a} = \frac{\mu}{c^2}\frac{\mu}{a^3}\left[2\beta\left(\frac{a}{r}\right)^2+\gamma\frac{a}{r}+2(\gamma+1)\frac{a}{r}\frac{e^2}{1-e^2}\sin f\right] \tag{338}$$

ここで，

$$\frac{dt}{df} = \frac{1}{n\sqrt{1-e^2}}\left(\frac{r}{a}\right)^2, \quad \frac{dt}{du} = \frac{r}{na}, \quad \sin f = \frac{r}{a}\sqrt{1-e^2}$$
$$\frac{r}{a} = 1 - e\cos u, \quad \frac{a}{r} = \frac{1+e\cos f}{1-e^2}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{a}{r}\left[\gamma + 2(1+\gamma)\frac{e^2}{1-e^2}\sin^2 f\right] \\
=\ & \frac{a}{r}\left[\gamma + 2(1+\gamma)\frac{e^2}{1-e^2}(1-\cos^2 f)\right] \\
=\ & \frac{1}{1-e^2}\frac{a}{r}\left[\left\{\gamma(1-e^2) + 2(1+\gamma)(1-e^2)e^2\right\} - 2(1+\gamma)e^2\cos^2 f\right] \\
=\ & \frac{1}{1-e^2}\frac{a}{r}\left[-(2+\gamma)(1-e^2) + 2(1+\gamma)(1-e^2\cos^2 f)\right] \\
=\ & \frac{a}{r}\left[-(2+\gamma) + 2(\gamma+1)\frac{1-e^2\cos^2 f}{1-e^2}\right]
\end{aligned}$$

したがって，

$$\mathrm{S}\frac{r}{a} = \frac{\mu}{c^2}\frac{\mu}{a^3}\left[2\beta\left(\frac{a}{r}\right)^2 - (2+\gamma)\frac{a}{r} + 2(1+\gamma)\frac{a}{r}\frac{1-e^2\cos^2 f}{1-e^2}\right] \tag{339}$$

ここで，

$$\int\left(\frac{a}{r}\right)^2 dt = \frac{1}{n\sqrt{1-e^2}}\int df = \frac{f}{n\sqrt{1-e^2}} \tag{340}$$

$$\int\frac{a}{r}dt = \frac{1}{n}\int du = \frac{u}{n} \tag{341}$$

$$\begin{aligned}
\int\frac{a}{r}(1-e^2\cos^2 f)dt &= \int\left(\frac{a}{r}\right)^2(1-e\cos f)dt = \frac{1}{n\sqrt{1-e^2}}\int(1-e\cos f)df \\
&= \frac{1}{n\sqrt{1-e^2}}(f - e\sin f)
\end{aligned} \tag{342}$$

より，

$$\frac{2}{na}\int\mathrm{S}\frac{r}{a}dt = \frac{\mu}{c^2}\frac{\mu}{a^3}\frac{2}{na}\left[\frac{2\beta f}{n\sqrt{1-e^2}} - (2+\gamma)\frac{u}{n} + 2(1+\gamma)\frac{f-e\sin f}{(1-e^2)^{\frac{3}{2}}}\right] \tag{343}$$

したがって，

$$\begin{aligned}
\Delta\ell &= \ell_0' - \ell_0 \\
&= \sqrt{1-e^2}\Delta\omega + \frac{2\mu}{c^2 a\sqrt{1-e^2}^3} \\
&\quad \times\left[2\left\{1+\gamma+\beta-\beta e^2\right\}f - (2+\gamma)\sqrt{1-e^2}u - 2(1+\gamma)e\sin f\right]
\end{aligned} \tag{344}$$

一周期平均を取ると，

$$\langle\Delta\ell_0\rangle = \frac{2\mu}{c^2 a\sqrt{1-e^2}^3}\cdot 2\pi\cdot\left[2(1+\gamma+\beta-\beta e^2) - (2+\gamma)\sqrt{1-e^2}\right] \tag{345}$$

惑星の近日点（永年）移動

$$\langle \Delta o\dot{m}ega \rangle = \frac{GM(2+2\gamma-\beta)}{c^2 a\sqrt{1-e^2}} n \sim \frac{3GM_\odot}{c^2}\frac{n}{a\sqrt{1-e^2}}$$

| 惑星 | $a$ AU | $e$ | $n \times 10^8$ ″/cy | $\langle \Delta\dot{\omega} \rangle$ ″/cy | $\langle \Delta\dot{\omega} \rangle$ ″/cy |
|---|---|---|---|---|---|
| 水星 | 0.387 | 0.206 | 5.381 | 43.00 | 8.86 |
| 金星 | 0.723 | 0.007 | 2.107 | 8.63 | 0.06 |
| 地球 | 1.000 | 0.017 | 1.269 | 3.84 | 0.07 |
| 火星 | 1.524 | 0.003 | 0.689 | 1.35 | 0.13 |
| 木星 | 5.203 | 0.049 | 0.109 | 0.06 | 0.003 |
| 土星 | 9.555 | 0.056 | 0.01 | | |
| 天王星 | 19.22 | 0.046 | 0.015 | | |
| 海王星 | 30.11 | 0.009 | 0.099 | | |
| 冥王星 | 39.54 | 0.249 | 0.052 | | |

Table 2: 惑星の近日点移動量

Newcomb (1885) Ex. 月

| 惑星 | $e\Delta\dot{\omega}_{\mathrm{Obs.}}$ | $e\Delta\dot{\omega}_{\mathrm{Newton}}$ | Diff. |
|---|---|---|---|
| 水星 | $118.24 \pm 0.40$ | $109.76 \pm 0.16$ | $+8.48 \pm 0.43$ |
| 金星 | $0.29 \pm 0.20$ | $0.34 \pm 0.15$ | $-0.05 \pm 0.25$ |
| 地球 | $19.48 \pm 0.12$ | $19.38 \pm 0.05$ | $+0.10 \pm 0.13$ |
| 火星 | $149.55 \pm 0.35$ | $148,80 \pm 0.04$ | $+0.75 \pm 0.35$ |

Table 3: Newcomb による惑星の近日点移動量

$$\frac{3GM_\oplus}{c^2}\frac{n}{a\sqrt{1-e^2}} \sim \frac{3 \times 4.44 \times 10^{-3} \times 13.176 \times 3600 \times 36525}{3.844 \times 10^8 \times (1-0.055^2)} \sim 0.06''\mathrm{cy}$$

よって，$e\langle \Delta\dot{\omega} \rangle = 0.003''\mathrm{cy}$

Dancomb (1956)

| 惑星 | $e\Delta\dot{\omega}_{\mathrm{Obs.}}$ | $e\Delta\dot{\omega}_{\mathrm{Newton}}$ | Diff. |
|---|---|---|---|
| 水星 | $1151.593 \pm 0.084$ | $1142.730 \pm 0.040$ | $8.963 \pm 0.093$ |
| 金星 | $34.529 \pm 0.032$ | $34.472 \pm 0.006$ | $0.057 \pm 0.033$ |
| 地球 | $103.604 \pm 0.020$ | $103.520 \pm 0.004$ | $0.084 \pm 0.020$ |

Table 4: Dancomb による惑星の近日点移動量

## 2.5　$N$ 個の質点系の運動方程式

$N$ 個の質点系（Ex 惑星）の運動方程式は？

だが，

1. 質点 (mass point) とは？
2. 質量の定義 $M = \int \rho d^3x$，$\rho = \underbrace{\rho_0}_{\text{Newton 的密度}} + \frac{1}{c^2}[\quad]$？

### 2.5.1　テンソル密度

デカルト座標系を用いると，

$$d\Omega \equiv dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 \tag{346}$$

変数変換

$$x' = x'(x), \quad d\Omega \to d\Omega'$$

によって，

$$d\Omega = \frac{1}{J} d\Omega'. \quad J = \left| \frac{\partial x'}{\partial x} \right| \quad \text{ヤコビヤン} \tag{347}$$

$J$？

$$\underbrace{\eta_{\mu\nu}}_{\text{ガリレイ}} \to \underbrace{g_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}}_{\text{一般曲線}} \tag{348}$$

$$\eta_{\mu\nu} = g_{\alpha'\beta'} \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\nu} \tag{349}$$

det を取ると，

$$\begin{aligned} |\eta_{\mu\nu}| &= |g_{\alpha'\beta'}| J^2 \\ -1 &= g J^2 \end{aligned} \tag{350}$$

したがって，

$$\frac{1}{J} = \sqrt{-g}, \quad \sqrt{-g} = \det(g_{\mu\nu}) \tag{351}$$

よって，

$$\frac{1}{J} d\Omega' = \sqrt{-g} d^4x$$

は不変量[28]．

[28] テンソル $A^{[\dots]}_{[\dots]}$ に対して，

$$A^{[\dots]}_{[\dots]} \sqrt{-g}$$

をテンソル密度という．

### 2.5.2　質量密度

$\rho$ とは？

$$\rho \cong \rho_0 \left(1 + \frac{\Pi}{c^2}\right), \quad \triangle\phi = 4\pi G\rho_0 \tag{352}$$

ここで，$\rho_0$ は rest mass (Baryon number?)．このとき，圧力 $p$ がゼロとする．結局，

$$\rho^\dagger \cong \rho \left[1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\boldsymbol{v}^2}{2} + 3\gamma\phi\right)\right] \cong \rho_0 \left[1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\boldsymbol{v}^2}{2} + \Pi + 3\gamma\phi\right)\right] \tag{353}$$

### 2.5.3　スカラー密度

質量密度 $\rho \to \rho\sqrt{-g} \to$ 質量は一意的ではない．

質量の 4 次元化（？）

ニュートン的

$$M = \int \rho_0 dV, \quad dV = d^3x \tag{354}$$

しかし，4 次元において $M = \int \rho dV$ は？

一つの考え方

$\int Mdt$ を考える．

ニュートン的には

$$\int_{t_0}^{t} Mdt' = M(t - t_0) \tag{355}$$

$$\int Mdt \int \rho \underbrace{d\Omega}_{4\text{次元}} = \int \rho\sqrt{-g}d^4x \tag{356}$$

したがって

$$M = \frac{d}{dt}\int \rho\sqrt{-g}d^4x \tag{357}$$

ここで $t$ は何を取るべきか？

一つの考え方

$t$ は $M$ とともに動く固有時 $\tau$．したがって，

$$M = \frac{d}{d\tau}\int \rho\sqrt{-g}d^4x = \int \rho\sqrt{-g}\frac{dt}{d\tau}d^3x \equiv \int \rho^\dagger d^3x \tag{358}$$

$$\begin{aligned} \rho^\dagger = \rho\frac{dt}{d\tau} &= \rho\left(1 + (3\gamma - 1)\frac{\phi}{c^2} + \cdots\right)\left(1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\boldsymbol{v}^2}{2} + \phi\right) + \cdots\right) \\ \cong &\ \rho\left[1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{\boldsymbol{v}^2}{2} + 3\gamma\phi\right)\right] \end{aligned} \tag{359}$$

さて，EIH ゲージにおいて，

$$\begin{aligned}
g_{00} &= -1 + \frac{2\phi}{c^2} + \frac{2\psi}{c^4} + cdots && (360)\\
\psi &= -\beta\phi^2 + \left(\gamma + \frac{3}{2}\right)\phi_1 + (3\gamma - 2\beta + 1)\phi_2 + \phi_3 + 3\gamma\phi_4 - \frac{1}{2}(\mathcal{A} + \mathcal{B}) && (361)\\
\phi_1 &= \sum_J \frac{GM_J}{r_J}\boldsymbol{v}_J^2, \quad r_J = |\boldsymbol{r}_J|, \boldsymbol{r}_J = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x_J} && (362)\\
\phi_2 &= \sum_J \frac{GM_J}{r_J}\sum_{K\neq J}\frac{GM_K}{r_{JK}}, \quad \boldsymbol{r}_{JK} = |\boldsymbol{r}_{JK}|, \boldsymbol{r}_{JK} = \boldsymbol{r}_J - \boldsymbol{r}_K && (363)\\
M &= \int \rho_0 \left[1 + \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2 + \Pi + 3\gamma\phi\right)\right] d^3x && (364)\\
\phi &= \int \frac{G\rho_0}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|} \\
&= \int \frac{G\rho_0[...]}{|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}'|}\left[1 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2 + \Pi + 3\gamma\phi\right)\right] \\
&= \sum_J \frac{GM_J}{r_J} - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\phi_1}{2} + \phi_3 + 3\gamma\phi_2\right) && (365)\\
\phi_4 &= 0, \quad (p = 0) && (366)
\end{aligned}$$

結局，

$$\begin{aligned}
\phi + \frac{\psi}{c^2} \quad \rightarrow \quad & \sum_J \frac{GM_J}{r_J} + \frac{1}{c^2}\left[-\beta\left(\sum_J \frac{GM_J}{r_J}\right)^2 + (\gamma + 1)\sum_J \frac{GM_J}{r_J}\boldsymbol{v}_J^2\right. \\
& \left. - (2\beta - 1)\sum_J \frac{GM}{r_J}\sum_{K\neq J}\frac{GM_K}{r_{JK}} - \frac{1}{2}(\mathcal{A} + \mathcal{B})\right] && (367)\\
& \mathcal{A} = \sum_J \frac{GM_J(\boldsymbol{r}_J \cdot \boldsymbol{v}_J)^2}{r_J^3} && (368)\\
& \mathcal{B} = \sum_J \frac{GM_J\boldsymbol{a}_J \cdot \boldsymbol{r}_J}{r_J} = -\sum_J \frac{GM_J\boldsymbol{r}_J}{r_J}\sum_{K\neq J}\frac{GM_K\boldsymbol{r}_{JK}}{r_{JK}^3} && (369)
\end{aligned}$$

ここで，

$$\phi = \sum_J \frac{GM_J}{r_J}$$

とおくと，

$$\begin{aligned}
\psi &= -\beta\left(\sum_J \frac{GM_J}{r_J}\right)^2 + (\gamma + 1)\sum_J \frac{GM_J}{r_J}\boldsymbol{v}_J^2 - (2\beta - 1)\sum_J \frac{GM_J}{r_J}\sum_{K\neq J}\frac{GM_K}{r_{JK}} \\
& -\frac{1}{2}\sum_J \frac{GM_J(\boldsymbol{r}_J \cdot \boldsymbol{v}_J)^2}{r_J^3} + \frac{1}{2}\sum_J \frac{GM_J}{r_J}\boldsymbol{r}_J\sum_{K\neq J}\frac{GM_K\boldsymbol{r}_{JK}}{r_{JK}^3} && (370)\\
\boldsymbol{g} &= -2(\gamma + 1)\boldsymbol{V} = -2(\gamma + 1)\sum \frac{GM_J}{r_J}\boldsymbol{v}_J && (371)
\end{aligned}$$

### 2.5.4 EIH 方程式

$$
\begin{aligned}
\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} &= \boldsymbol{a}+\frac{1}{c^2}\Big[\boldsymbol{b}+\gamma(\boldsymbol{v}^2+2\phi)\boldsymbol{a}-\dot{\boldsymbol{g}}-\Big\{(1+2\gamma)\dot{\phi}+2(\gamma+1)(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a})\Big\} \\
&\quad +\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{g})\Big] \qquad (372)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{b}=\nabla\phi &= -2\beta\sum_J\frac{GM_J}{r_J}\left(-\frac{GM_J\boldsymbol{r}_J}{r_J^3}\right)-(\gamma+1)\sum_J\frac{GM_J\boldsymbol{r}_J}{r_J^3}\boldsymbol{v}_J^2 \\
&\quad +(2\beta+1)\sum_J\frac{GM_J\boldsymbol{r}_J}{r_J^3}\sum_{K\neq J}\frac{GM_K}{r_{JK}} \\
&\quad -\frac{1}{2}\sum_J\left(\frac{2GM_J\boldsymbol{v}_J}{r_J^3}(\boldsymbol{r}_J\cdot\boldsymbol{v}_J)-\frac{3GM_J(\boldsymbol{r}_J\cdot\boldsymbol{v}_J)^2}{r_J^5}\boldsymbol{r}_J\right) \\
&\quad +\frac{1}{2}\sum_J\left[\frac{GM_J}{r_J}\left(\sum_{K\neq J}\frac{GM_K\boldsymbol{r}_{JK}}{r_{JK}^3}\right)-\left\{\frac{GM_J\boldsymbol{r}_J}{r_J^3}\cdot\left(\sum_{K\neq J}\frac{GM_K\boldsymbol{r}_{JK}}{r_{JK}^3}\right)\right\}\right] \qquad (373)
\end{aligned}
$$

$$
\gamma(\boldsymbol{v}^2-2\phi)\boldsymbol{a} = -\gamma\sum_J\frac{GM_J\boldsymbol{r}_J}{r_J^3}\boldsymbol{v}_J^2+2\gamma\sum_J\frac{GM_J\boldsymbol{r}_J}{r_J^3}\cdot\sum_I\frac{GM_I}{r_I} \qquad (374)
$$

$$
\begin{aligned}
-\dot{\boldsymbol{g}} &= 2(\gamma+1)\left[\sum_J\frac{GM_J}{r_J}\boldsymbol{a}_J+\sum_J\frac{GM_J}{r_J^3}(\boldsymbol{r}_J\cdot\boldsymbol{v}_J)\boldsymbol{v}_J\right] \\
&= -2(\gamma+1)\left[\sum_J\frac{GM_J}{r_J}\sum_{K\neq J}\frac{GM_K\boldsymbol{r}_{JK}}{r_{JK}^3}-\sum_J\frac{GM_J}{r_J^3}(\boldsymbol{r}_J\cdot\boldsymbol{v}_J)\boldsymbol{v}_J\right] \qquad (375)
\end{aligned}
$$

$$
-(1+2\gamma)\dot{\phi}\boldsymbol{v}_J = -(1+2\gamma)\sum_J\frac{GM_J}{r_J^3}(\boldsymbol{r}_J\cdot\boldsymbol{v}_J)\boldsymbol{v}_J \qquad (376)
$$

$$
-2(\gamma+1)(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{v} = 2(1+\gamma)\sum_J\frac{GM_J}{r_J^3}(\boldsymbol{r}_J\cdot\boldsymbol{v}_J)\boldsymbol{v}_J \qquad (377)
$$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{g}) &= -2(1+\gamma)\boldsymbol{v}\times\left(\nabla\times\sum_J\frac{GM_J}{r_J}\boldsymbol{v}_J\right) \\
&= -2(1+\gamma)\sum_J\boldsymbol{v}_J\times\left[\left(-\frac{GM_J\boldsymbol{r}_J}{r_J^3}\right)\times\boldsymbol{v}_J\right] \\
&= 2(\gamma+1)\sum_J\frac{GM_J}{r_J^3}\boldsymbol{v}\times(\boldsymbol{r}_J\times\boldsymbol{v}_J) \\
&= 2(\gamma+1)\sum_J\frac{GM_J}{r_J^3}\{(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}_J)\boldsymbol{r}_J-(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{r}_J)\boldsymbol{v}_J\} \qquad (378)
\end{aligned}
$$

これらを用いると，

$$
\begin{aligned}
&\Big[\boldsymbol{b}+\gamma(\boldsymbol{v}^2+2\phi)\boldsymbol{a}-\dot{\boldsymbol{g}}-\Big\{(1+2\gamma)\dot{\phi}+2(\gamma+1)(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a})\Big\}+\boldsymbol{v}\times(\nabla\times\boldsymbol{g})\Big] \\
= \;& 2\beta\left(\sum_J\frac{GM_I}{r_I}\right)\left(\sum_J\frac{GM_J\boldsymbol{r}_J}{r_J^3}\right)-(\gamma+1)\sum_J\frac{GM_J}{r_J^3}\boldsymbol{v}_J^2\boldsymbol{r}_J+(2\beta-1)\sum_J\frac{GM_J}{r_J^3}\sum_{K\neq J}\frac{GM_K}{r_{JK}}\boldsymbol{r}_J \\
&-\sum_J\frac{{GM_J}^3}{r_J}(\boldsymbol{r}_J\cdot\boldsymbol{v}_J)\boldsymbol{v}_j+\frac{3}{2}\sum_J\frac{GM_J}{r_J^5}(\boldsymbol{r}_J\cdot\boldsymbol{v}_J)^2\boldsymbol{r}_J+\frac{1}{2}\sum_J\frac{GM_J}{r_J}\sum_{K\neq J}\frac{GM_K}{r_{JK}^3}\boldsymbol{r}_{JK}- \\
&-\frac{1}{2}\sum_J\frac{GM_J}{r_J^3}\sum_{K\neq J}\frac{GM_K}{r_{JK}^3}(\boldsymbol{r}_J\cdot\boldsymbol{r}_{JK})\boldsymbol{r}_J-\gamma\sum_J\frac{GM_J}{r_J^3}\boldsymbol{v}^2\boldsymbol{r}_J+2\gamma\sum\frac{GM_J}{r_J^3}\sum_I\frac{GM_I}{r_I}\boldsymbol{r}_I-
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
& -2(\gamma+1)\sum_J \frac{GM_J}{r_J}\sum_K \frac{GM_K}{r_{JK}^3}\boldsymbol{r}_{JK} + 2(\gamma+1)\sum_J \frac{GM_J}{r_J^3}(\boldsymbol{r}_J\cdot\boldsymbol{v}_J)\boldsymbol{v}_J \\
& -(2\gamma+1)\sum_J \frac{GM_J}{r_J^3}(\boldsymbol{r}_J\cdot\boldsymbol{v}_J)\boldsymbol{v} + 2(1+\gamma)\sum_J \frac{GM_J}{r_J^3}(\boldsymbol{r}_J\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{v} \\
& +2(\gamma+1)\sum_J \frac{GM_J}{r_J^3}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}_J)\boldsymbol{r}_J - 2(\gamma+1)\sum_J \frac{GM_J}{r_J^3}(\boldsymbol{r}_J\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}_J \\
= & \sum_J \frac{GM_J}{r_J^3}\boldsymbol{r}_J\left[2(\beta+\gamma)\sum_I \frac{GM_I}{r_I} - (\gamma+1)\boldsymbol{v}_J^2 - \gamma\boldsymbol{v}^2 + 2(\gamma+1)(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v})\right. \\
& \left. + \sum_{K\neq J}\frac{GM_K}{r_{JK}}\left\{(2\beta-1) - \frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{r}_J\cdot\boldsymbol{r}_{JK}}{r_{JK}^2}\right\} + \frac{3}{2}\frac{(\boldsymbol{r}_J\cdot\boldsymbol{v}_J)^2}{r_J^2}\right] \\
& + \sum_J \frac{GM_J}{r_J^3}\left[-(2\gamma+1)(\boldsymbol{r}_J\cdot\boldsymbol{v}_J)\boldsymbol{v} + 2(\gamma+1)(\boldsymbol{r}_J\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}\right. \\
& \left. -2(1+\gamma)(\boldsymbol{r}_J\cdot\boldsymbol{v})\boldsymbol{v}_J + (2\gamma+1)(\boldsymbol{r}_J\cdot\boldsymbol{v}_J)\boldsymbol{v}_J\right] \\
& -\left(2\gamma+\frac{3}{2}\right)\sum_J \frac{GM_J}{r_J}\sum_{K\neq J}\frac{GM_K}{r_{JK}^3}\boldsymbol{r}_{JK}
\end{aligned} \tag{379}
$$

したがって,

$$
\begin{aligned}
\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = & -\sum_J \frac{GM_J}{r_J^3}\boldsymbol{r}_J \\
& +\frac{1}{c^2}\left[\sum_J \frac{GM_J}{r_J}\left\{\frac{\boldsymbol{r}_J}{r_J^2}\left[2(\beta+\gamma)\sum_I \frac{GM_I}{r_I} - -(\gamma+1)\boldsymbol{v}_J^2 + 2(\gamma+1)\boldsymbol{v}_J\cdot\boldsymbol{v} - \gamma\boldsymbol{V}^2\right.\right.\right. \\
& \left. +\frac{3}{2}\left(\frac{\boldsymbol{r}_J\cdot\boldsymbol{v}_J}{r_J}\right)^2 + \sum_{K\neq J}\frac{GM_K}{r_{JK}}\left\{(2\beta-1) - \frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{r}_J\cdot\boldsymbol{r}_{JK}}{r_{JK}^2}\right\}\right] \\
& +\left(\frac{\boldsymbol{r}_J}{r_J^2}\cdot\{(2\gamma+1)\boldsymbol{v}_J - 2(1+\gamma)\boldsymbol{v}\}\right)(\boldsymbol{v}_J-\boldsymbol{v}) \\
& \left.\left. -(2\gamma+2)\sum \frac{GM_K}{r_{JK}^3}\boldsymbol{r}_{JK}\right\}\right]
\end{aligned} \tag{380}
$$

これが，$N$ 個の質点の作る重力場中の test particle (それ自身の重力は無視) の運動方程式のポスト・ニュートン近似，すなわち Einstein-Infeld-Hoffmann (流) の運動方程式である．

用途 $\cdots$ 太陽系天体（天然，人工）の精密軌道計算．

### 2.5.5　非 test particle の場合の EIH 方程式

$$
\underbrace{\frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = -\sum_J \frac{GM_J\boldsymbol{r}_J}{r_J}}_{\text{test particle}} \quad\Rightarrow\quad \underbrace{\frac{d\boldsymbol{v}_L}{dt} = -\sum_{J\neq L}\frac{GM_J\boldsymbol{r}_{LJ}}{r_{LJ}}}_{\text{質点同士}} \tag{381}
$$

**測地線仮説 (geodesic (motion) hypothesis)：**

自己重力場が自分の軌跡に与える影響は無視する．

このとき EIH 方程式は，

$$
\begin{aligned}
\frac{d\boldsymbol{v}_L}{dt} &= -\sum_{J\neq L}\frac{GM_J}{r_{LJ}^3}\boldsymbol{r}_{LJ} \\
&+\frac{1}{c^2}\left[\sum_{J\neq L}\frac{GM_J}{r_{LJ}}\left\{\frac{\boldsymbol{r}_{LJ}}{r_{LJ}^2}\left[2(\beta+\gamma)\sum_{I\neq L}\frac{GM_I}{r_{LI}}--(\gamma+1)\boldsymbol{v}_J^2+2(\gamma+1)\boldsymbol{v}_J\cdot\boldsymbol{v}_L-\gamma\boldsymbol{V}_L^2\right.\right.\right. \\
&+\frac{3}{2}\left(\frac{\boldsymbol{r}_{LJ}\cdot\boldsymbol{v}_J}{r_{LJ}}\right)^2+\sum_{K\neq J}\frac{GM_K}{r_{JK}}\left\{(2\beta-1)-\frac{1}{2}\frac{\boldsymbol{r}_{LJ}\cdot\boldsymbol{r}_{JK}}{r_{JK}^2}\right\}\Bigg] \\
&+\left(\frac{\boldsymbol{r}_{LJ}}{r_{LJ}^2}\cdot\{(2\gamma+1)\boldsymbol{v}_J-2(1+\gamma)\boldsymbol{v}_L\}\right)(\boldsymbol{v}_J-\boldsymbol{v}_L) \\
&\left.\left.-(2\gamma+2)\sum\frac{GM_K}{r_{JK}^3}\boldsymbol{r}_{JK}\right\}\right] \qquad (382)
\end{aligned}
$$

となる．これが本来の EIH 方程式 (1935)．これは現代版の太陽系天体運動理論の基本方程式となっている．

- JPL：DE (Developement Ephemeris) シリーズ (最新は DE405/406) ⋯ AA
- 水路部：FE ⋯ 天体位置表
- BdL：VSOP ⋯ CdT

# References


[1] V. A. Brumberg, “Essential Relativistic Celestial Mecahnics”, 1991, Adams Hilgar, Bristol

[2] V. Fock, “The Theory of Space Time and Gravitation”, 1964, Pergamon Press, Oxford London New York Paris

[3] L. Infeld and J. Plebánski, “Motion and Relativity”, 1960, Pergamon Press, Oxford London New York Paris

[4] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, “THe Classical Theory of fields”, 1962, Addison-Wesley, Reading, Mass
(邦題：「場の古典論」, 恒藤敏彦, 広重徹 訳, 1978, 東京図書)

[5] C. W. Misner, K. S. Thorne and J. A. Wheeler, “Gravitation”, 1973, W. H. Freeman & Company, New York

[6] C. Moller, “The Theory of Relativity”, 1962, Oxford Univ. Press, Oxford

[7] J. L. Synge, “Relativity : The Specail Theory”, 1955, North-Holland Public Co. Netherlands

[8] J. L. Synge, “Relativity : The General Theory”, 1960, North-Holland Public Co. Netherlands

[9] P. K. Seidelmann, “Explanatory Supplement to the Astronomical Almanac”, 1992, University Science Books, Sausalito California

[10] M. H. Soffe, “Relativity in Astrometory, Celestial Mechanics and Geodesy”, 1989, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York London Paris Tokyo

[11] S. Weinberg, “Gravitation and Cosmology”, 1972, John Wiley & Sons, New York Chichester Brisbane Toronto Shingapore

[12] C. M. Will, “Theory and Experiment in Gravitational Physics”, 1981 (Revised 1993), Cambridge Univ. Press, Cambridge

[13] C. M. Will, “Was Einstein Right ?”, 1986, Basic Books, New York
(邦題：アインシュタインは正しかったか？, 松田卓也, 二間瀬敏史 訳, 1989, TBS ブリタニカ)