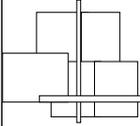


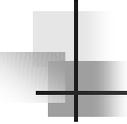
位置天文学入門 講義ノート



福島登志夫

国立天文台、東京大学、総合研究大学院大学

2005



目次

- 1. 概論
- 2. 観測
- 3. 時間
- 4. 空間
- 5. 座標系
- 6. 運動
- 7. 回転
- 8. 地球回転
- 9. ケプラー運動
- 10. 信号伝播
- 11. 最小二乗法
- 12. 相対論効果

1. 概論

- 位置天文学(Astrometry)とは何か?
- 一般的諸原理
- 位置天文学の基本要素
 - 準拠系: 時刻系、空間座標系、単位系
 - 運動: 線形、軌道、自転
 - 信号伝播: 片道、往復、準同時
- 数学的道具

位置天文学とは何か

- 天体の位置や運動を通じた宇宙の探求
 - 別名: 基本天文学、古典天文学
 - (天体物理学と対比するときの) 天文学
- 関連する学問
 - 天体力学
 - 測地学
 - 特殊相対論、一般相対論

諸原理

- 4次元連続時空
- 因果律
- 時間の矢の一定性
- 決定性原理
- 慣性系の存在
- 相対性原理

準拠系

- 準拠系 = 座標系 + 単位系
- 時刻系 = 時間座標系
 - 天文学的、物理学的、放送
- 空間座標系
 - 地平、赤道、黄道(こうどう)
 - 太陽系重心、地心、地球(= 地殻固定)
- 単位系: 国際(SI), 天文

運動

- 宇宙膨張
- 遠方天体:(静止も含む)準線形運動
 - 恒星、銀河、クェーサー
- 軌道運動
 - 準ケプラー:連星、彗星、小惑星
 - 複雑:惑星、衛星、探査機
- 自転運動
 - 地球、月、惑星、衛星、小惑星、恒星

信号伝播

- 電磁波
 - 光、赤外、電波、X線、 γ 線
 - 幾何光学近似 = 光子の運動
 - 相対論的扱い
- 宇宙線 = 高エネルギー粒子
- 重力波

数学的道具

- ベクトル解析
- 線形代数
- 非線形方程式の解法
- 最小二乗法
- フーリエ解析
- 常微分方程式の数値積分

2. 観測

- 非可測量 = 大局的量
 - 座標、長さ
- 可測量 = 局所的量 ~ 観測量
 - 時計の読み、角度、その他
- 測定法の分類
 - 受動的、半受動的、能動的
- 新世代の観測装置

可測量

- 時計の読み
 - 時刻：到着時刻、発射時刻
 - 時間間隔 = 経過時間
- 角度：入射方向ベクトルの差
- その他
 - 波長 = エネルギー
 - 信号パターン、内包される暗号

受動的観測

- 天体カメラ: 2次元角度
 - CCDアレイ、ビデオ、写真乾板
- 経緯儀、子午儀、子午環: 1次元角度
- 干渉計: 精密な1次元角度
 - VLBI (超長基線電波干渉計)
 - 光赤外干渉計、X線干渉計、...
- 地上観測か軌道上観測か

受動的観測 (続き)

- 検出器 : 到着時刻、エネルギー
 - 光電子増倍管PMT、光ダイオード
 - 荷電結合素子CCD、泡箱、霧箱、...
- 時計の読み
 - 現象時刻 : 到着、食、掩蔽、...
- 時系列 : 光度曲線、増光・減衰パターン
- ドップラー偏移 : 視線速度
 - 分光計、輝線・吸収線

半受動的観測

- ドップラー偏移
 - 人工衛星・探査機とのアップ/ダウン・リンク
- 積分ドップラー(偏移) ~ 距離差の測定
 - NNSS, DORIS/PRARE
- 半受動的VLBI: ALSEP, RISE
- 時間差観測: GPS, GLONASS

能動的観測

- レーダー爆撃
 - 水星、金星、火星、地球近傍小惑星
- 距離・距離変化率 (R&RR) 観測
 - 人工衛星、探査機
- 往復電波通信
 - 人工衛星、探査機
- レーザー測距
 - 人工衛星 (SLR)、月 (LLR)

光干渉計

- NPOI: 米海軍
 - 位置天文専用、フラッグスタッフ(米国)
- PRIMA/VLTI: 欧州南天天文台ESO
 - VLTのアウト・リガー、ラ・シア(チリ)
- 軌道望遠鏡: NASA
 - SIM: 宇宙干渉計
 - TPF-I: (干渉計版)地球型系外惑星発見

位置天文専用軌道望遠鏡

- HIPPARCOS : 欧州宇宙機関ESA
 - 初の専用軌道望遠鏡、多大な成果
- GAIA : ESA
 - HIPPARCOSの後継、2011年夏打ち上げ
- JASMINE : 国立天文台(日本)
 - 赤外に特化

VLBI

- 超長基線電波干渉計
- VLBA: 全米に10局、NRAO
- VSOP: 世界初の軌道アンテナ(日本)
- VERA: 国内に4局、国立天文台
 - 2ビームアンテナ、位相補償
- e-VLBI
 - 超高速ネットワークによる実時間相関

3.時間

- 基本概念
- 理想的時刻系の3大分類
 - 積算時刻系、力学時刻系、放送時刻系
- 実用的時刻系
 - 原子時、世界時
 - 太陽系重心力学時、太陽系重心座標時
- 時間の単位と表現法
 - ユリウス日の計算

時間の基本概念

- ニュートンの描像
- 絶対時間
- 時間の変換: 1対1 $t = f(\tau)$
- 順序: 年代学
- 精度と確度
 - 反復性に関する本質的疑問

積算時刻系

- 仮定：特定現象の経過時間が一定
- 時刻 = 現象の積算回数
- 例
 - 天文現象：日、月、年
 - 機械的現象：振り子時計、ゼンマイ時計
 - 物理現象：水晶時計、分子時計、原子時計

力学時刻系

- 運動方程式の時間引数
- 観測値から逆関数として決まる時刻
- 例
 - 太陽の平均黄経 (天動說的言い方だが)
 - $L(T) = 279^{\circ}41'48''.04 + 129602769''.13T + 1''.089T^2$
 - 暦表時 $ET = T(L)$

放送時刻系

- 放送される時刻系: JJY, TV, NTT
 - 計算機ネットワーク上の時刻系: NTP時
 - 人工衛星から放送される時刻系: GPS時
- 標準時
 - 時圏: 経度15度 = 1時間
- 中央標準時 (= 日本標準時): JST
 - $JST = UTC(\text{協定世界時}) + 9 \text{ h}$

原子時

- 秒の定義(国際単位系):CGPM(1967)
 - 9162631770 周期
 - セシウム133の特定の放射周波数
- 国際原子時TAI
 - 度量衡中央局BIPM(Paris)によって維持
 - 数百のセシウム原子時計
+ 数個の水素メーザー時計
 - 相対精度:15-16桁

原子時計

- 原子時計 = 水晶時計 + 基準周波数発生器 + 周波数変換回路 + 周波数同調回路
- 基準周波数発生メカニズム
 - 閉殻原子 : 原子時計
 - セシウム原子 : HP/Agilent 5071A
 - メーザー発振 : メーザー時計
 - 水素メーザー : Quvant社、Anritsu

世界時

- 地球自転に関する力学時刻系
 - 世界時UT = グリニッチ平均(太陽)時GMT
 - 三種類の世界時: UT0, UT1, UT2
 - 国際地球回転監視事業IERS
- 協定世界時UTC
- 永年的な地球自転の減速: 閏秒の挿入

太陽系力学時

- 国際天文学連合IAUの正式時刻系 (1984-1991)
 - 一般相対論的效果を考慮
 - 太陽系重心力学時TDB
 - 地球力学時TDT
 - 時間単位の調整: $\langle \text{TDB} \rangle = \langle \text{TDT} \rangle$
- $\text{TDT} = \text{TAI} + 32.184\text{s}$

太陽系座標時

- IAUの正式時刻系 (1991-)
 - 時間単位の調整を放棄
 - 太陽系重心座標時TCB
 - 地心座標時TCG
 - 地球時TT
 - $TT = TDT = TAI + 32.184s$
- TCB-TCG: 時間暦
 - Harada and Fukushima (2003)

時間の単位

- 1日 = 24時間 = 1440分 = 86400秒
- ユリウス世紀: jc、ユリウス年: jy
 - 1ユリウス世紀 = 100 ユリウス年 = 36525日
- ベッセル年 = 平均太陽年
= 365.2421897...日
- ms, μ s, ns, ps, fs, ...
- 真空中の光速度 $c = 299792458$ m/s

時間の表現法

- 西暦: 年月日時分秒
 - 通日、曜日
- ユリウス日JD
 - $J2000.0 = 2000\text{年}1\text{月}12\text{時} = JD2451545.0$
- 修正ユリウス日MJD
 - $MJD = JD - 2400000.5$

ユリウス日の計算

- 年月日時分秒(Y,M,D,h,m,s)からJD
 - $L = \text{int}((M-14)/12);$
 - $I = 1461 * (Y + 4800 + L);$
 - $J = 367 * (M - 2 - 12 * L);$
 - $K = \text{int}((Y + 4900 + L)/100);$
 - $N = \text{int}(I/4) + \text{int}(J/12) - \text{int}((3 * K)/4)$

ユリウス日の計算(続き)

- $JD0 = N + D - 32075;$
- $JD1 = JD0 - 0.5;$
- $JD2 = h/24.0 + m/1440.0 + s/86400.0;$
- $JD = JD1 + JD2$ or $JD = (JD1, JD2)$

年月日の計算

- JDから年月日時分秒 (Y,M,D,h,m,s)へ
 - $JD0 = \text{int}(JD - 0.5)$; $JD1 = JD0 - 0.5$;
 - $L = JD0 + 68569$;
 - $N = \text{int}((4 * L) / 146097)$;
 - $K = L - \text{int}((146097 * N + 3) / 4)$;
 - $I = \text{int}(4000 * (K + 1) / 1461001)$;
 - $P = K - \text{int}((1461 * I) / 4) + 31$;

年月日の計算(続き)

- $J = \text{int}((80 * P) / 2447);$
- $D = P - \text{int}((2447 * J) / 80); Q = \text{int}(J / 11);$
- $M = J + 2 - 12 * Q; Y = 100 * (N - 49) + I + Q;$
- $JD2 = JD - JD1;$
- $h = \text{int}(JD2 * 24)$
- $m = \text{int}(JD2 * 1440 - h * 60);$
- $s = JD2 * 86400 - h * 3600 - m * 60;$

曜日の計算

- $l = \text{JD0} - 7 * \text{int}((\text{JD0} + 1) / 7) + 2;$
- $l: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$
- $l=1$: Sunday

4.空間

- 空間座標と単位
- 空間座標変換
 - 直交座標 \leftrightarrow 球座標, 回転楕円体座標
- 慣性系
 - 座標原点の平行移動、回転
- 速度と加速度

空間座標

- 直交座標 (x, y, z)
 - 理解しやすい、運動天体の記述
- 球座標 (r, θ, λ) (r, ϕ, λ)
 - 距離を別扱い、不動天体の記述
- 回転楕円体座標 (φ, λ, h)
 - 固体惑星・衛星上の位置の記述

球座標

- 地平座標: 地上の観測者向き
 $r, (z, A); (a, A); (\text{Alt}, \text{Az}); (\text{El}, \text{Az})$
- 黄道座標 r, β, λ
- 赤道座標 π, α, δ
- 銀河座標 π, b, ℓ

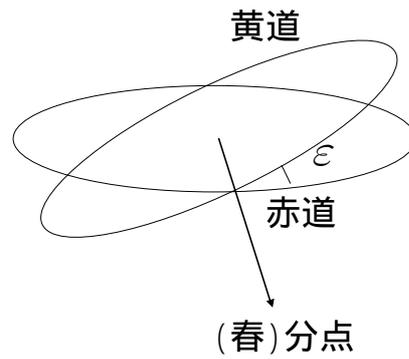
地平座標

- 距離: r 、天頂距離: z
- 高度角 (略して「高度」)
 - $a = \text{Alt} = \text{El} = 90 \text{ deg} - z$
- 方位角 (略して「方位」): $A = \text{Az}$ 、左手系

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \sin z \cos A \\ -\sin z \sin A \\ \cos z \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos a \cos A \\ -\cos a \sin A \\ \sin a \end{pmatrix}$$

黄道座標

- 黄道(こうどう) ~ 地球の平均軌道
- 太陽系天体に使用
- 黄道傾角:
 - 動径: r
 - 黄経(こうけい):
 - 黄緯(こうい):

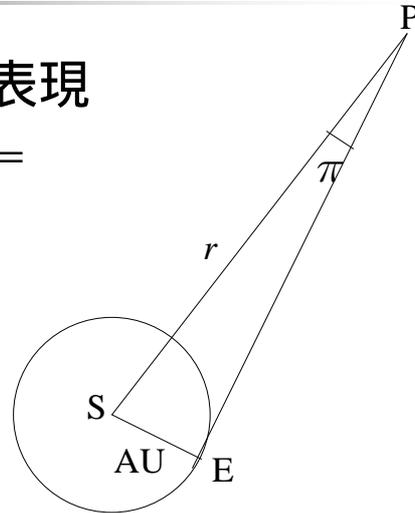


赤道座標

■ 天体位置の基本座標表現

- 赤経(せっけい): R.A. =
- 赤緯(せきい): Decl. =
- (年周)視差:

$$\pi = \sin^{-1} \left(\frac{\text{AU}}{r} \right)$$



角度の単位

- ラジアン(弧度) : rad
- 度 : deg = °
- 分(角) : min = arc minute = '
- 秒(角) : second = arc second = "
= arcsec = as

■ 角度の単位 (続き)

- 1度 = 60分角 = 3600秒角
- 180度 = ラジアン
- 1秒角 ~ 4.848 μ rad
- 20秒角 ~ 0.1 mrad: 光行差の大きさ
- 0.001秒角 = ミリ秒角: mas
- 0.000001秒角 = マイクロ秒角: μ as

長さの単位

- メートル(国際単位系)
 - 真空中の光速: $c = 299792458 \text{ m/s}$
- (長さの)天文単位: AU
 - 粗い定義: 地球軌道の平均半径
 - 厳密な定義: $AU = c \times 499 \text{ s}$
- パーセク (pc)、光年 (ly)
 - $1 \text{ pc} = AU / \sin 1'' \sim 30.9 \text{ Pm} \sim 3.26 \text{ ly}$
 - $1 \text{ ly} = c \times 1 \text{ jy} \sim 9.5 \text{ Pm}$

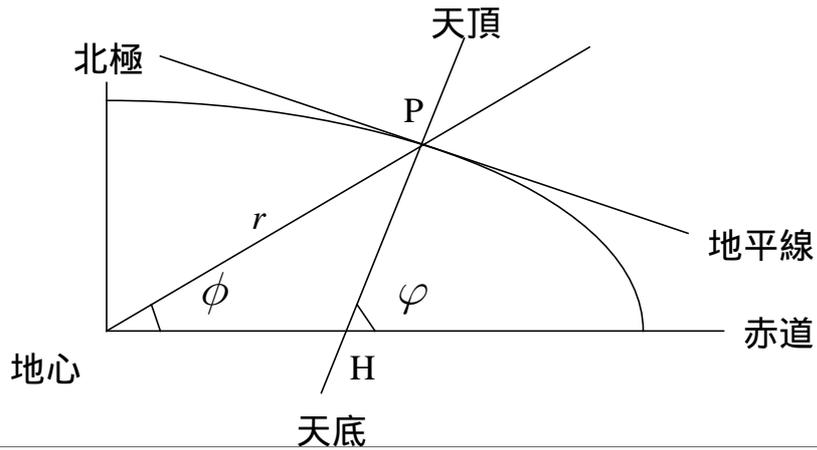
回転楕円体座標

- (地理)緯度: φ
- 経度:
- 基準楕円体からの高さ: h

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_N \cos \varphi \cos \lambda \\ \rho_N \cos \varphi \sin \lambda \\ \rho_Z \sin \varphi \end{pmatrix}$$

地理緯度

- 地心緯度: ϕ
- 地理緯度 (= 測地緯度): φ



回轉楕円体座標 (続き)

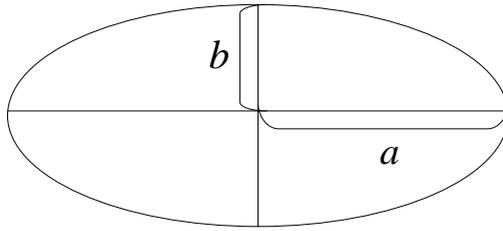
- 卯酉 (ぼうゆう) 線曲率半径: N

$$\rho_N = N + h, \rho_Z = (1 - e^2)N + h$$

$$N = \frac{a}{d}, d = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}$$

橢圓

- 長半徑： a
 - 短半徑： b
- $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$



扁平率

- 扁平率: f
- 離心率: e , 副離心率: e_c

$$f \equiv \frac{a-b}{a}, \quad e_c \equiv \frac{b}{a} = \sqrt{1-e^2} = 1-f$$

$$e^2 \equiv \frac{a^2-b^2}{a^2} = 2f - f^2$$

球座標から直交座標へ

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \lambda \\ \sin \theta \sin \lambda \\ \cos \theta \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \lambda \\ \cos \phi \sin \lambda \\ \sin \phi \end{pmatrix}$$

直交座標から球座標へ

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, p = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\theta = \cos^{-1} \left(\frac{z}{r} \right) = \text{atan2} (p, z),$$

$$\phi = \sin^{-1} \left(\frac{z}{r} \right) = \text{atan2} (z, p),$$

$$\lambda = \text{atan2} (y, x)$$

回転楕円体座標から 直交座標へ

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_N \cos \varphi \cos \lambda \\ \rho_N \cos \varphi \sin \lambda \\ \rho_Z \sin \varphi \end{pmatrix}$$

$$\rho_N = N + h, \rho_Z = (1 - e^2)N + h$$

$$N = \frac{a}{d}, d = \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}$$

直交座標から 回転楕円体座標へ

- 古来の難問
- 経度は簡単 $\lambda = \text{atan2}(y, x)$
- 経度を消去

$$\begin{cases} (N + h) \cos \varphi = p \equiv \sqrt{x^2 + y^2} \\ (N(1 - e^2) + h) \sin \varphi = z \end{cases}$$

- 修正緯度方程式を解く

緯度方程式

- 高さ h を消去

$$p \sin \varphi - z \cos \varphi = \frac{C \sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}}$$

where $C = ae^2$

修正緯度方程式

- 変数変換 $t = \cot \varphi$
- 変換後の方程式
- 導出と解法

$$f(t) \equiv zt + \frac{Ct}{\sqrt{g + t^2}} - p = 0$$

where $g \equiv 1 - e^2$

修正緯度方程式の導出

$$\sin \varphi = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \cos \varphi = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\therefore \frac{p}{\sqrt{1+t^2}} - \frac{zt}{\sqrt{1+t^2}} = \frac{C}{\sqrt{1-e^2} \frac{1}{1+t^2}} \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$p - zt = \frac{Ct}{\sqrt{(1-e^2)+t^2}}$$

修正緯度方程式の解法

- パラメータの標準化(北半球に限定) $0 \leq z$
- 標準化後の変数域

$$f(0) = -p \leq 0, \quad f(+\infty) \approx zt + C \geq 0$$

$$\therefore 0 \leq t \leq +\infty$$

- ニュートン法

- 初期推定値 $t_0 = \frac{p}{z + C / \sqrt{g}}$

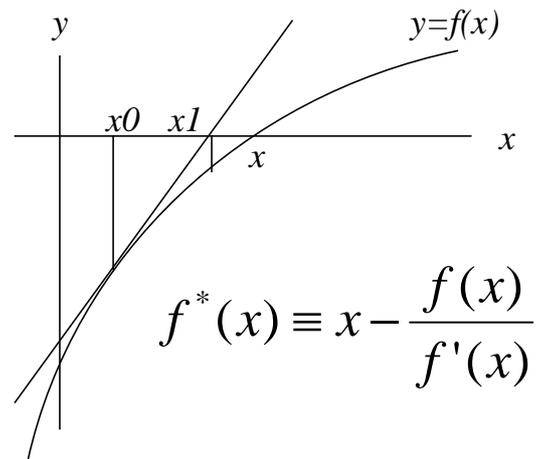
ニュートン法

- 非線形方程式の効果的解法

$$f(x) = 0$$

- 基本は線形近似
- ニュートン反復

$$x \rightarrow f^*(x)$$



ニュートン法 (続き)

- 二次の収束
 - 有効桁数が倍々で増加
- 速いが不安定
- 重根のときは遅い
- 要点
 - 解の囲い込み: 単根性を保証
 - 安定な出発値: 安定性を保証

ニュートン法に対する 良い出発値

- 囲い込み

$$x_L < x < x_R$$

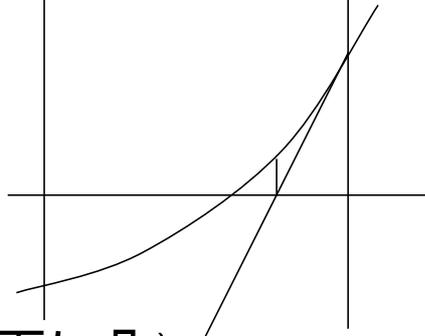
- 仮定その1 (根の存在)

$$f(x_L) < 0 < f(x_R)$$

- 仮定その2 (単調増加、下に凸)

$$x_L < x < x_R \rightarrow f'(x) > 0, f''(x) > 0$$

- 安定な出発値 = 解の上界



修正緯度方程式に 対する応用

■ 準備

$$f(t) \equiv zt + \frac{Ct}{\sqrt{g+t^2}} - p$$
$$f(0) = -p \leq 0 \leq f(+\infty)$$
$$f'(t) = z + \frac{Cg}{\left(\sqrt{g+t^2}\right)^3} > 0$$
$$f''(t) = \frac{-3Cgt}{\left(\sqrt{g+t^2}\right)^5} < 0$$

修正緯度方程式に 対する応用(続き)

- ニュートン反復

$$f^*(t) \equiv t - \frac{f(t)}{f'(t)} = \frac{p \left(\sqrt{g+t^2} \right)^3 - Ct^3}{z \left(\sqrt{g+t^2} \right)^3 + Cg}$$

- 安定な出発値 = 解の下界

$$t_0 = 0 \rightarrow f^*(0) = \frac{p}{z + C/\sqrt{g}}$$

速度と加速度

- 速度 = 位置の時間変化
- 加速度 = 速度の時間変化
- 加速度変化率 (Jerk)

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}, \quad \mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2}, \quad \mathbf{j} = \frac{d^3\mathbf{x}}{dt^3}$$

球座標系での速度

- ベクトル表現

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r} \right) \frac{dr}{dt} + \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \phi} \right) \frac{d\phi}{dt} + \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda} \right) \frac{d\lambda}{dt}$$

$$= v_r \mathbf{e}_r + v_\phi \mathbf{e}_\phi + v_\lambda \mathbf{e}_\lambda$$

- 成分表現

$$v_r = \frac{dr}{dt}, \quad v_\phi = r \frac{d\phi}{dt}, \quad v_\lambda = r \cos \phi \frac{d\lambda}{dt}$$

球座標系の三つ組

$$\mathbf{e}_r \equiv \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial r} \right) = \begin{pmatrix} \cos \phi \cos \lambda \\ \cos \phi \sin \lambda \\ \sin \phi \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_\phi \equiv \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \phi} \right) = \begin{pmatrix} -\sin \phi \cos \lambda \\ -\sin \phi \sin \lambda \\ \cos \phi \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}_\lambda \equiv \frac{1}{r \cos \phi} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda} \right) = \begin{pmatrix} -\sin \lambda \\ \cos \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$$

回転楕円体座標系での 速度

■ ベクトル表現

$$\mathbf{v} = \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial h} \right) \frac{dh}{dt} + \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi} \right) \frac{d\varphi}{dt} + \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda} \right) \frac{d\lambda}{dt} = v_h \mathbf{e}_h + v_\varphi \mathbf{e}_\varphi + v_\lambda \mathbf{e}_\lambda$$

■ 成分表現

$$v_h = \frac{dh}{dt}, \quad v_\varphi = \rho_M \frac{d\varphi}{dt}, \quad v_\lambda = \rho_N \cos \varphi \frac{d\lambda}{dt}$$

$$\rho_M = M + h, \quad M = \frac{a(1-e^2)}{\left(\sqrt{1-e^2 \sin^2 \varphi} \right)^3}$$

回転楕円体座標系の 三つ組

$$\mathbf{e}_h \equiv \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial h} \right) = \begin{pmatrix} \cos \varphi \cos \lambda \\ \cos \varphi \sin \lambda \\ \sin \varphi \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_\varphi \equiv \frac{1}{\rho_M} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \varphi} \right) = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \cos \lambda \\ -\sin \varphi \sin \lambda \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{e}_\lambda \equiv \frac{1}{\rho_N \cos \varphi} \left(\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \lambda} \right) = \begin{pmatrix} -\sin \lambda \\ \cos \lambda \\ 0 \end{pmatrix}$$

回転楕円体座標系での 曲率半径

- 卯酉線曲率半径 = 東西方向の曲率半径

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}} \quad \rho_N = N + h, \rho_Z = (1 - e^2)N + h$$

- 子午線曲率半径 = 南北方向の曲率半径

$$M = \frac{a(1 - e^2)}{\left(\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}\right)^3} \quad \rho_M = M + h$$

$$\frac{d(\rho_N \cos \varphi)}{d\varphi} = \rho_M \sin \varphi, \quad \frac{d(\rho_Z \sin \varphi)}{d\varphi} = \rho_M \cos \varphi$$

5. 座標系

- 4次元時空座標系 = 時刻系 + 空間座標系
- 慣性系
- 加速系と慣性力
 - 回轉座標系 : コリオリ力、遠心力
- 座標変換
 - ガリレイ変換、剛体回轉

慣性系

- 慣性の法則が成り立つ座標系
- (ニュートンの) 慣性の法則
 - 力が働かない物体は等速直線運動する
- ガリレイの相対性原理
 - すべての慣性系において物理法則は不変
- 座標系原点の平行(= 等速直線) 移動
 - 慣性系を慣性系へ

座標原点の平行移動

- ケーサー(静止)座標系の中の銀河中心
 - 宇宙膨張
- 銀河座標系の中の局所静止原点
 - 局所静止原点Local Standard of Rest
= 太陽系重心
 - 局所的運動の様相: オールトの定数

座標原点の平行移動

(続き)

- 太陽系重心座標系の中の地球重心
 - 惑星暦
- 地心座標系の中の平均的地殻
 - 地球回転
- 地球座標系の中の観測者
 - 地表(= 平均的地殻)に固定
 - 地表に対して運動(人工衛星、航空機)

天体暦と航海暦

- 複雑な天体運動を記述した数表
 - 惑星、月、衛星、小惑星の軌道運動
 - 惑星・衛星の自転運動
- 米英暦Astronomical Almanac (US+UK)
- 天体位置表Japanese Ephemeris
- DEシリーズ(NASA/JPL), DE413/408
 - もっとも精密、計算機上で利用可能

空間座標変換の理論

■ 一般座標変換 $x_k \leftarrow X_j = X_j(x_k, t)$

■ 新座標についてテイラー展開

$$\begin{aligned} X_j &= X_j(0, t) + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial X_j}{\partial x_k}(0, t) x_k + \dots \\ &= A_j(t) + \sum_{k=1}^3 B_{jk}(t) x_k + \dots \end{aligned}$$

線形座標変換

- 一般アフィン変換

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{x}$$

- 静的: 12パラメーター変換

$$\mathbf{X} = \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{x}$$

係数行列の分解

$$B = D + S + \Theta$$

- 拡大縮小 = 対角成分

$$D_{jk} = 0 \quad \text{if } j \neq k$$

- ずれ = 非対角成分 + 対称成分

$$S_{jk} = S_{kj} \quad (S_{jk} = 0 \quad \text{if } j = k)$$

- 無限小回転 = 非対称成分 $\Theta_{jk} = -\Theta_{kj}$

7パラメーター座標変換

- ほとんど似た座標系同士の変換
 - スケール変換 = 等方性拡大・縮小
 - 原点移動
 - 無限小回転
- $$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + (s\mathbf{I} + \Theta)\mathbf{x}$$
- 例: 複数の地心座標系同士の変換
 - 世界測地系 (ITRFnn, WGS84, GRS80)
 - 旧日本測地系

6.天体の運動

- 静止:クェーサー
- 線形運動:恒星
- 自転運動:地球、月、衛星
- ケプラー軌道:連星系
- 準ケプラー軌道:小惑星、衛星
- 複雑な軌道運動:惑星、探査機

静止天体

- ケーサー: 実質上静止
- 位置表現
 - 元期 Epoch t_0
 - (元期における) 平均位置 (α_0, δ_0)
 - (元期における) 視差 π_0
- ケーサー星表: IAU, ICRFnn

線形運動

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \mathbf{v}_0(t - t_0)$$

- 通常、視線方向は別扱い
- 固有運動 = 球面上の近似的線形運動

$$\mathbf{x} = r \begin{pmatrix} \cos \delta \cos \alpha \\ \cos \delta \sin \alpha \\ \sin \delta \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} r \\ \alpha \\ \delta \end{pmatrix} \cong \begin{pmatrix} r_0 \\ \alpha_0 \\ \delta_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} V_R \\ \mu_\alpha \\ \mu_\delta \end{pmatrix} (t - t_0)$$

星表

- 元期、(元期における)平均位置と視差
- 固有運動 (μ_α, μ_δ)
- 視線速度 V_R
- 天体物理学的情報
 - 光度、色、変光性、...
- 位置天文学的星表
 - HIPPARCOS, FKn, PPM, AGKn

7. 回転運動

- 回転 = 直交変換
 - 無限小回転 = ベクトル積
 - 有限回転 = 行列
- オイラーの定理
- 基本回転
- 角速度ベクトル

直交線形変換

- ユークリッド空間上の距離不変

$$(\Delta \mathbf{X})^2 = (\Delta \mathbf{x})^2$$

- 回転: 一種の線形変換

$$\Delta \mathbf{X} = \mathbf{R} \Delta \mathbf{x}$$

- 直交性

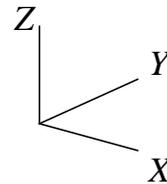
$$(\mathbf{R} \Delta \mathbf{x})^2 = \Delta \mathbf{x}^T \mathbf{R}^T \mathbf{R} \Delta \mathbf{x} = (\Delta \mathbf{x})^2$$

$$\therefore \mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{I} \text{ or } \mathbf{R}^{-1} = \mathbf{R}^T$$

有限回転

- 表現方法: 行列、スピノル、四元数
- 回転操作 = ある種の行列の掛け算
- 回転行列 = 一次独立な基底ベクトル
= (座標系の) 三つ組

$$\mathbf{R} = (\mathbf{e}_X \quad \mathbf{e}_Y \quad \mathbf{e}_Z)$$



オイラーの定理

- 任意の有限回転 = 基本回転行列の三重積

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{ijk}(\alpha, \beta, \gamma) \equiv \mathbf{R}_k(\gamma)\mathbf{R}_j(\beta)\mathbf{R}_i(\alpha)$$

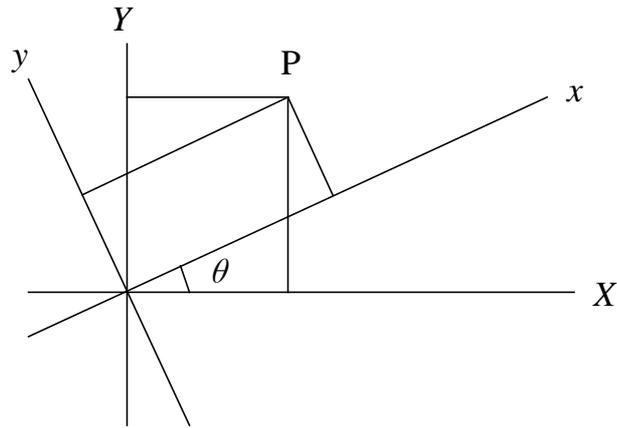
$$\left(\mathbf{R}_{ijk}(\alpha, \beta, \gamma)\right)^{-1} = \mathbf{R}_{kji}(-\gamma, -\beta, -\alpha)$$

- オイラー角 = 三つの基本回転角

基本回転操作

- z-軸周りに角度 θ だけ回転

$$\mathbf{R}_3(\theta) = \mathbf{R}_z(\theta)$$



基本回転操作 (続き)

- (任意の) j -軸周りに角度 θ だけ回転

$$\mathbf{R}_j(\theta)$$

- 逆回転

$$\left(\mathbf{R}_j(\theta)\right)^{-1} = \mathbf{R}_j(-\theta)$$

基本回轉行列

$$\mathbf{R}_3(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- 例：赤道·黃道座標變換 $\mathbf{R}_1(\varepsilon)$
- 黃道傾角 ε

基本回転行列 (続き)

- 微小角近似

$$\mathbf{R}_3(\theta) \cong \mathbf{I} + \begin{pmatrix} 0 & \theta & 0 \\ -\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathbf{I} - \theta \mathbf{e}_3 \times$$

$$\therefore \prod_j \mathbf{R}_j(\theta_j) \cong \mathbf{I} - \left(\sum_j \theta_j \mathbf{e}_j \right) \times$$

オイラー回転

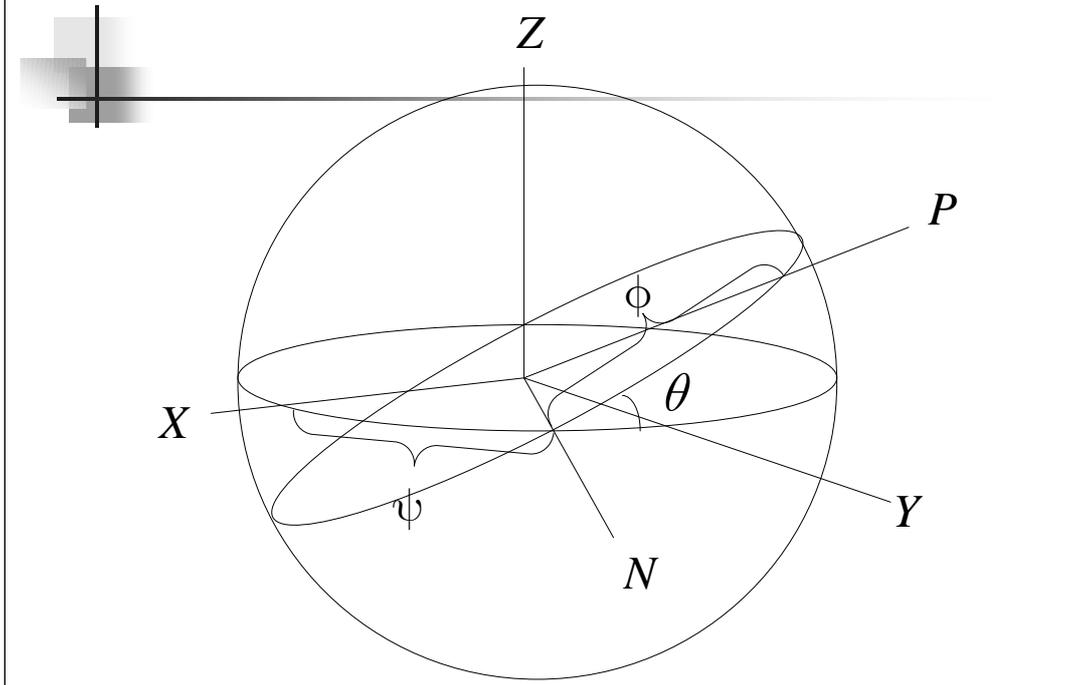
- オイラー角の組み合わせ: $3 \times 2 \times 2 = 12$ 通り
- 3-1-3系列 (= X用法)
 - 最も有名 (いわゆるオイラー角)
 - 自転運動の力学で多用

$$\mathbf{R}_{313}(\psi, \theta, \phi) = \mathbf{R}_3(\phi)\mathbf{R}_1(\theta)\mathbf{R}_3(\psi)$$

3-1-3オイラー回転行列

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{313}(\psi, \theta, \phi) &= \begin{pmatrix} C_\psi C_\phi - S_\psi C_\theta S_\phi & C_\psi S_\phi + S_\psi C_\theta C_\phi & S_\psi S_\theta \\ -S_\psi C_\phi - C_\psi C_\theta S_\phi & -S_\psi S_\phi + C_\psi C_\theta C_\phi & C_\psi S_\theta \\ S_\theta S_\phi & -S_\theta C_\phi & C_\theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\psi \cos\phi - \sin\psi \cos\theta \sin\phi & \cos\psi \sin\phi + \sin\psi \cos\theta \cos\phi & \sin\psi \sin\theta \\ -\sin\psi \cos\phi - \cos\psi \cos\theta \sin\phi & -\sin\psi \sin\phi + \cos\psi \cos\theta \cos\phi & \cos\psi \sin\theta \\ \sin\theta \sin\phi & -\sin\theta \cos\phi & \cos\theta \end{pmatrix} \end{aligned}$$

オイラー角 (3-1-3系列)



3-1-3系列の欠点

- 微小角の場合の縮退

$$\mathbf{R}_{313}(\psi, \theta, \phi) \cong \mathbf{I} - \begin{pmatrix} \theta \\ 0 \\ \phi + \psi \end{pmatrix} \times$$

- 解決策
 - 3-2-1風の(添え字がすべて異なる)系列

3-2-3系列

- 別名=Y用法、例:歳差行列

$$\mathbf{P} = \mathbf{R}_{323}(-\zeta_A, \theta_A, -z_A)$$

- らせん回転 = 固定軸周りの回転

$$\mathbf{R}_{323}(\lambda, \varphi, \chi) = \mathbf{I} + (\sin \chi) \mathbf{n} \times + (1 - \cos \chi) \mathbf{n} \times \mathbf{n} \times$$

$$\mathbf{n} = \begin{pmatrix} \sin \varphi \cos \lambda \\ \sin \varphi \sin \lambda \\ \cos \varphi \end{pmatrix}$$

他の系列

- 1-3-1系列: 章動行列

$$\mathbf{N} = \mathbf{R}_{131}(\varepsilon_A, -\Delta\psi, -(\varepsilon_A + \Delta\varepsilon))$$

- 2-1-3系列: 極運動 + 恒星時回転

$$\mathbf{WS} = \mathbf{R}_{312}(\Theta, -y_p, -x_p)$$

- 1-2-3系列: 航空力学、衛星の姿勢制御
 - 最も望ましい

回転と速度の変換

$$\mathbf{X} = \mathbf{R}\mathbf{x} \Rightarrow \mathbf{V} = \mathbf{R}\mathbf{v} + \frac{d\mathbf{R}}{dt}\mathbf{x}$$

$$\Rightarrow \mathbf{R}\mathbf{v} = \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega}\mathbf{X} = \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{X}$$

$$\boldsymbol{\Omega} \equiv -\left(\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right)\mathbf{R}^{-1} = \boldsymbol{\Omega} \times$$

角速度ベクトル

$$\boldsymbol{\omega} \equiv \mathbf{R}^{-1}\boldsymbol{\Omega} = -\sum_j \left(\frac{d\theta_j}{dt} \right) \mathbf{e}_j$$

$$\because \mathbf{R} = \prod_j \mathbf{R}_j(\theta_j) \cong \mathbf{I} - \left(\sum_j \theta_j \mathbf{e}_j \right) \times$$

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = - \left[\sum_j \left(\frac{d\theta_j}{dt} \right) \mathbf{e}_j \right] \times = \boldsymbol{\omega} \times$$

微小角回転の一例

$$\mathbf{R}_{123}(\alpha, \beta, \gamma) = \mathbf{R}_3(\gamma)\mathbf{R}_2(\beta)\mathbf{R}_1(\alpha)$$

$$= \begin{pmatrix} C_\gamma C_\beta & C_\gamma S_\beta S_\alpha + S_\gamma C_\alpha & -C_\gamma S_\beta C_\alpha + S_\gamma S_\alpha \\ -S_\gamma C_\beta & -S_\gamma S_\beta S_\alpha + C_\gamma C_\alpha & S_\gamma S_\beta C_\alpha + C_\gamma S_\alpha \\ S_\beta & -C_\beta S_\alpha & C_\beta C_\alpha \end{pmatrix}$$

$$\cong \mathbf{I} - \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \times$$

無限小回転

- 反対称行列 = 軸性ベクトルに等価

$$\Theta = \begin{pmatrix} 0 & -\theta_z & \theta_y \\ \theta_z & 0 & -\theta_x \\ -\theta_y & \theta_x & 0 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{\theta} = \begin{pmatrix} \theta_x \\ \theta_y \\ \theta_z \end{pmatrix}$$

- ベクトル積の正しい解釈

$$\Theta \Delta \mathbf{x} = \boldsymbol{\theta} \times \Delta \mathbf{x}$$

回転と加速度の変換

$$\mathbf{A} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{V} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{X}) + \left(\frac{d\boldsymbol{\Omega}}{dt} \right) \times \mathbf{X} = \mathbf{R}\mathbf{a}$$

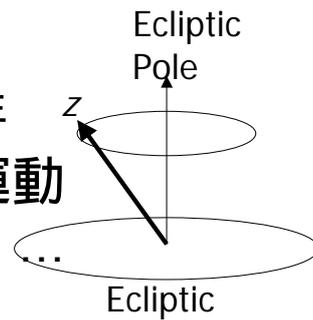
- 第2項 = コリオリ力
- 第3項 = 遠心力
- 第4項 = 名前なし

8. 地球回転

- 地球座標系と地心座標系の変換
- 日周運動S...回転角UT1
- 極軸の運動
 - 準日周: 極運動W
 - 準日周以外: 歳差P + 章動N
- 行列表現 $\mathbf{R} = \mathbf{W}\mathbf{S}\mathbf{N}\mathbf{P}$

歳差・章動

- 地球の極軸の運動(準日周以外の周期)
- 表現: 黄道座標系では2成分
 - 黄経、黄道傾角
- 歳差 = 超長期周期運動
 - 50秒角/年, 周期約2万6千年
- 章動 = 比較的短期の周期運動
 - 18.6年 (= 章)、半年、9.3年、...
- 新章動モデルへ移行中



歳差

- 発見: ヒッパルコス (~150BC)
- 旧歳差モデル: IAU1976
 - Lieske他 (1976, A&A)
 - 力学部分: ニューカム
 - 惑星質量の補正
 - 測地線歳差を加味
- 理論: 黄道座標系で構築
- 実用: 赤道座標系で表現

歳差 (続き)

$$P = R_{323} (-\zeta_A, \theta_A, -z_A)$$

■ 赤道座標系での3つの歳差角

$$\begin{pmatrix} \zeta_A \\ \theta_A \\ z_A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2306.2181 \\ 2004.3109 \\ 2306.2181 \end{pmatrix} T + \begin{pmatrix} 0.30188 \\ -0.42665 \\ 1.09468 \end{pmatrix} T^2 + \begin{pmatrix} 0.017998 \\ -0.041833 \\ 0.018203 \end{pmatrix} T^3$$

■ 単位: 1秒角

■ $T = (\text{JD} - 2451545.0) / 36525$

歳差の近似表現

- 歳差行列の近似

$$\mathbf{P} \cong \begin{pmatrix} 1 & -\phi_A & -\theta_A \\ \phi_A & 1 & 0 \\ \theta_A & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \phi_A \equiv \zeta_A + z_A$$

- 赤経・赤緯の補正

$$\Delta_P \alpha = \phi_A + \theta_A \tan \delta \sin \alpha, \quad \Delta_P \delta = \theta_A \cos \alpha$$

歳差の近似表現 (続き)

- 歳差角の近似

$$\phi_A \cong m_p T, \theta_A \cong n_p T$$

- 赤経・赤緯の歳差

$$m_p = 4612.4362''/\text{jy}, \quad n_p = 2004''.3109''/\text{jy}$$

- 赤経・赤緯の補正公式

$$\Delta_p \alpha \cong (m_p + n_p \tan \delta \sin \alpha) T,$$

$$\Delta_p \delta \cong (n_p \cos \alpha) T$$

章動

- 発見 : Bradley (1747)
- 旧章動モデルIAU1980
 - Seidelmann他 (1981, CM)
 - 剛体地球 : Kinoshita (1977, CM)
 - 非剛体効果 : Wahr (1981, GJRAS)
- 平均黄道傾角 (Lieske et al., 1976)

$$\varepsilon_A = 23^\circ 26' 21''.448 - 46''.8150T \\ - 0''.00059T^2 + 0''.001813T^3$$

章動(続き)

- 行列表現

$$\mathbf{N} = \mathbf{R}_{131}(\varepsilon_A, -\Delta\psi, -(\varepsilon_A + \Delta\varepsilon))$$

- 黄経の章動 Δ
- 黄道傾角の章動 Δ
- 解析的表現

$$\begin{pmatrix} \Delta\psi \\ \Delta\varepsilon \end{pmatrix} = \sum_k \begin{pmatrix} \psi_k \sin A_k \\ \varepsilon_k \cos A_k \end{pmatrix}, \quad A_k = \sum_{j=1}^5 n_j \Omega_j$$

ドロウネ角

- 章動理論の主要五角度
 - 月の平均近点角 ℓ
 - 太陽の平均近点角 ℓ'
 - 月の平均緯度引数 F
 - 月と太陽の平均離角 $D \equiv L - L'$
 - 月の平均昇交点経度 Ω
- 詳細はSeidelmann et al. (1981)

ごく粗い近似の章動

- 大きさのオーダー：10秒角
- 精度：0.1秒角、単位：1秒角

$$\begin{pmatrix} \Delta\psi \\ \Delta\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17.2 \sin \Omega \\ 9.2 \cos \Omega \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1.3 \sin 2L' \\ 0.6 \cos 2L' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.2 \sin 2\Omega \\ -0.1 \cos 2\Omega \end{pmatrix} \\ + \begin{pmatrix} -0.2 \sin 2L \\ 0.1 \cos 2L \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.1 \sin \ell' \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0.1 \sin \ell \\ 0 \end{pmatrix} + \dots$$

章動の近似表現

- 近似章動行列

$$\mathbf{N} \cong \begin{pmatrix} 1 & -\Delta\mu & -\Delta\nu \\ \Delta\mu & 1 & -\Delta\varepsilon \\ \Delta\nu & \Delta\varepsilon & 1 \end{pmatrix}$$

- 赤経・赤緯の章動

$$\Delta\mu = \Delta\psi \cos \varepsilon_A, \Delta\nu = \Delta\psi \sin \varepsilon_A$$

章動の近似表現 (続き)

- 赤経・赤緯の補正公式

$$\Delta_N \alpha = \Delta \mu + \tan \delta (\Delta \nu \sin \alpha - \Delta \varepsilon \cos \alpha),$$

$$\Delta_N \delta = \Delta \nu \cos \alpha + \Delta \varepsilon \sin \alpha$$

恒星時回転

- ほとんど一様、準日周回転
 - $\Omega_0 = 7.2921150(1) \times 10^{-5}$ ラジアン/秒
- 回転速度 = 1 恒星日で 360 度
~ 365.2422.../366.2422... 回転/日
- グリニッチ視恒星時GAST =

$$S = R_3(\Theta)$$

一様回転からのずれ

- UTC UT1 GMST GAST
 - DUT1 = UT1-UTC: 予測不能
 - GMST = GMST₀ + r UT1 + ...
 - 恒星時/世界時の比: r ~ 1.0027379...
 - GAST = GMST + Δ cos + ...
- 日の長さ LOD = 2π/Ω

極運動

- 地球上で見た(ゆっくりとした)極の動き
 - 記号: (x_p, y_p) 、大きさ: 0.1秒角~30m
 - 代表的周期: 年周、チャンドラー周期 (~14月)
- 予測不可能: 監視の必要あり

$$W = \mathbf{R}_2 \begin{pmatrix} -x_p \\ -y_p \end{pmatrix} \mathbf{R}_1 \begin{pmatrix} -x_p \\ -y_p \end{pmatrix}$$

地球姿勢パラメーター

- 地球姿勢パラメーター-EOP
 - DUT1, LOD, x_p , y_p , 極位置のずれ
 - 古い用語: 地球自転パラメーター-ERP
- 極位置のずれ = 歳差・章動理論の誤差
- 国際地球回転監視事業 IERS
 - 1984年から, IAUとIUGGの共同事業
 - WEBサイト: <http://www.iers.org/>

9. ケプラー運動

- ニュートン力学における二体問題の解

- 重力定数

$$\mu = G(M + m)$$

$$\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^3} \mathbf{x}$$

- 軌道要素 = 運動の6定数

- 軌道の形 a, e
- 軌道の向き Ω, I, ω
- 軌道上の位置 T

質量の単位

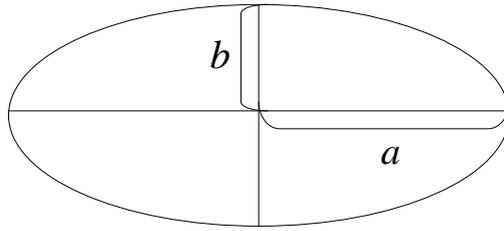
- 国際単位系 : キログラム kg
- 天文単位系 : 太陽質量 (変化は無視) M_S
- ニュートンの万有引力定数 : G
- 測定可能量 = GM
 - = (中心体の) 重力定数
 - 日心重力定数 GM_S 地心重力定数 GM_E

ケプラー軌道要素

- 軌道の長半径: a
- 軌道の離心率: e
- 昇交点経度: Ω
- 軌道傾斜角: i
- 近点引数: ω
- 近点通過時刻: T

橢圓(復習)

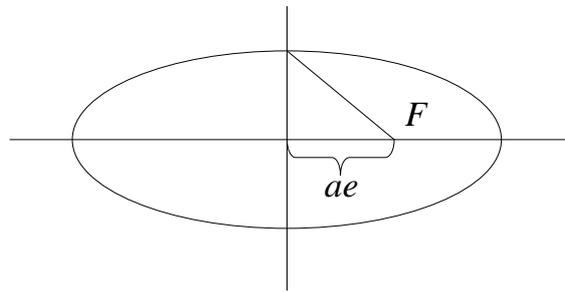
- 長半徑: a
 - 短半徑: b
- $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



離心率(復習)

- 離心率: e , 副離心率: e_c

$$e \equiv \sqrt{\frac{a^2 - b^2}{a^2}}, \quad e_c \equiv \frac{b}{a} = \sqrt{1 - e^2}$$



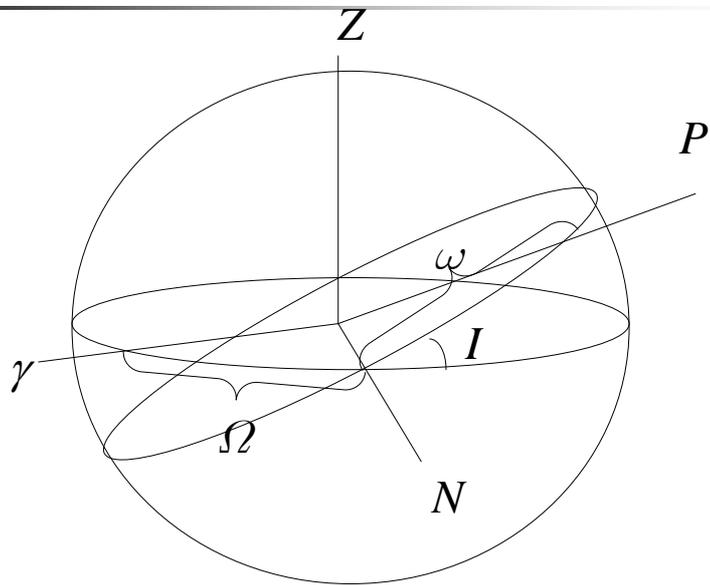
軌道面

- 軌道面のオイラー角 (3-1-3系列)

$$\mathbf{R}_{313}(\Omega, I, \omega) = \mathbf{R}_3(\omega)\mathbf{R}_1(I)\mathbf{R}_3(\Omega)$$

- 3つの重要な方向ベクトル
 - 経度原点: X軸
 - 昇交点: N
 - 近点: P

軌道面の模式図



ケプラー軌道

- 楕円: $e < 1$
 - 惑星、衛星、連星系
- 放物線: $e = 1$
 - 彗星軌道の良い近似
- 準放物線: $e \sim 1$
 - 彗星、特異小惑星
- 放物線: $e > 1$
 - 探査機、見かけ上(不適切な原点のため)

位置速度の計算(楕円)

- (楕円型)ケプラー方程式を解く

$$E - e \sin E = n(t - T)$$

- 離心近点角 E の時間変化 $\dot{E} = \frac{n}{1 - e \cos E}$
- 軌道面上の位置速度

$$\begin{cases} \xi = a(\cos E - e) \\ \eta = b \sin E \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\xi} = -a\dot{E} \sin E \\ \dot{\eta} = b\dot{E} \cos E \end{cases}$$

位置速度の計算(双曲線)

- (双曲型)ケプラー方程式を解く

$$e \sinh F - F = n(t - T)$$

- F の時間微分 $\dot{F} = \frac{n}{e \cosh F - 1}$
- 軌道面上の位置速度

$$\begin{cases} \xi = a(e - \cosh F) \\ \eta = b \sinh F \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{\xi} = -a\dot{F} \sinh F \\ \dot{\eta} = b\dot{F} \cosh F \end{cases}$$

位置速度の計算 (続き)

- 逆オイラー回転

$$(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = \mathbf{R}_{313}(-\omega, -I, -\Omega) \begin{pmatrix} \xi & \dot{\xi} \\ \eta & \dot{\eta} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ケプラー方程式

- 史上初の超越方程式

- 楕円型 $E - e \sin E = M$

- 放物型 $\tau + \frac{\tau^3}{3} = M_P$

- 双曲型 $e \sinh F - F = M_H$

楕円型ケプラー方程式

- 離心近点角: E $E - e \sin E = M$
- 平均近点角: M $M = n(t - T)$
- ケプラーの第3法則 $\mu = n^2 a^3$
- 真近点角: f

$$\begin{cases} \xi = a(\cos E - e) = r \cos f \\ \eta = b \sin E = r \sin f \end{cases}$$

ケプラー方程式の解法

$$f(E) \equiv E - e \sin E - M = 0$$

■ 変数域の標準化

$$-\infty < M < \infty \Rightarrow 0 \leq M < \pi \Rightarrow 0 \leq E < \pi$$

■ ニュートン法

$$E \rightarrow f^*(E)$$

$$f^*(E) \equiv E - \frac{f(E)}{f'(E)} = \frac{M - e(E \cos E - \sin E)}{1 - e \cos E}$$

ニュートン法の初期値

- ニュートン法の安定性理論 $f(0) \leq 0 < f(\pi),$
 $f'(E) > 0, f''(E) > 0$
- 安定な初期値 = 上界 $f^*(E_0)$
- 初期値の例
$$E_0 = \min\left(f^*(0), f^*\left(\frac{\pi}{2}\right), f^*(\pi)\right)$$
$$= \min\left(\frac{M}{1-e}, M+e, \frac{M+\pi e}{1+e}\right)$$

摂動ケプラー軌道

- 軌道要素 = (ゆっくりした)時間の関数

$$A \equiv (a, e, I, \Omega, \omega, T) = A(t)$$

- 摂動理論

- 多項式 + 三角級数

$$A = A_0 + A_1 t + A_2 t^2 + \dots$$

$$+ \sum_k (C_k \cos \nu_k t + S_k \sin \nu_k t)$$

複雑な運動

- 運動方程式 $\frac{d^2 \mathbf{x}}{dt^2} = \frac{-\mu}{r^3} \mathbf{x} + \dots$
- (変数変換+) 数値積分による数値解
- 摂動論+数式処理による解析解
- 観測データによる最適パラメータ推定
- 結果 = 天体暦

天体暦

- 数値暦の代表: DE (NASA/JPL)
- 解析理論の代表: VSOP/ELP (BdL)
- DEは国立天文台データセンターから利用可
 - 利用ソフト (Fortran/C) + バイナリー・ファイル
 - DE408: BC10000-AD10000, UNIX/Win/Mac
 - 太陽・月・九惑星の位置速度
- 衛星を含む全天体: HORIZONSシステム
 - <http://ssd.jpl.nasa.gov/>

10. 信号伝播

- 幾何光学近似
- 基本：片道伝播
- 応用：中継伝播
- 光方向：光行差と視差
- ドップラー偏移
- 伝播遅延

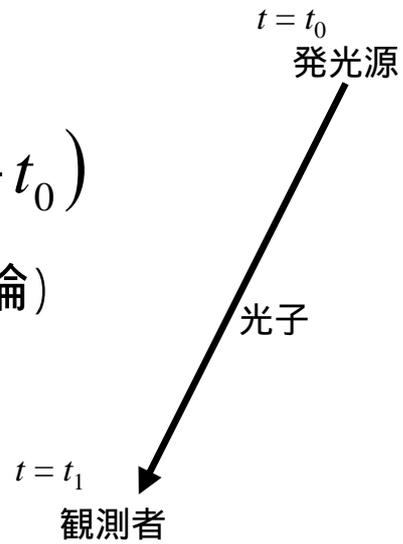
片道伝播

- 光子は等速直線運動

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_0 + \mathbf{V}_0(t - t_0)$$

- 光速度一定(特殊相対論)

$$|\mathbf{V}_0| = c$$



受動的觀測量

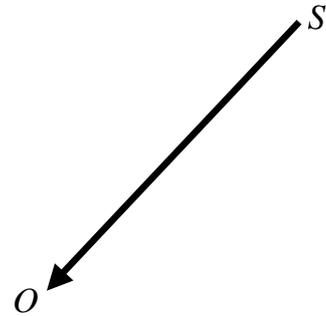
- 到着時刻 t_1
- 入射方向 \mathbf{d}_1
- 受光波長 λ_1

光差方程式

- 適用: 太陽系内
- 出発時刻 t_0 到着時刻 t_1
- 「光差」 = 伝播時間

$$\tau \equiv t_1 - t_0$$

- 光差を求める方程式 $c\tau = R_{10}(\tau)$



光差方程式の導出

- 光子の出発位置と到着位置の差

$$\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 = \mathbf{V}(t_1 - t_0)$$

- ベクトルの大きさを評価

$$R_{10} = V\tau$$

- 仮定: 発光源と観測者の運動は既知

$$\mathbf{x}_S(t), \mathbf{x}_O(t)$$

光差方程式の導出(続き)

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}_O(t_0), \mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_S(t_1), R_{10}(\tau) \equiv |\mathbf{R}_{10}(\tau)|,$$

$$\mathbf{R}_{10}(\tau) = \mathbf{x}_S(t_1) - \mathbf{x}_O(t_0) = \mathbf{x}_S(t_0 - \tau) - \mathbf{x}_O$$

- 光速度一定 (特殊相対論)

$$V = c$$

- Equation of Light Time

$$c\tau = R_{10}(\tau)$$

光差方程式の解法

$$f(\tau) \equiv c\tau - R(\tau) = 0$$

- ニュートン法 $\tau \rightarrow f^*(\tau)$
- 修正公式

$$f^*(\tau)' \equiv \tau - \frac{f(\tau)}{f'(\tau)} = \frac{R(\tau) - \tau R'(\tau)}{c - R'(\tau)}$$

光差方程式の近似解

- 初期推定: 光速度無限大 = 光差0の近似
- ニュートン法で1回修正

$$\tau^{(1)} \equiv f^*(0) = \frac{R_{SO}}{c - V_{SO}}$$

$$R_{SO} = |\mathbf{x}_S(t_1) - \mathbf{x}_1|, \quad V_{SO} = \frac{(\mathbf{v}_S(t_1) - \mathbf{v}_1) \cdot (\mathbf{x}_S(t_1) - \mathbf{x}_1)}{R_{SO}}$$

- 次の近似: 一般相対論が必要

光(到来)方向

$$\mathbf{d} = \frac{-\mathbf{V}_1}{|\mathbf{V}_1|} = \frac{-\mathbf{R}_{10}}{R_{10}}$$

- 光行差: 観測者の速度の影響
- 視差: 観測者の位置のずれ
- 周期: 年周、日周、月周、...
- 光差の補正: 太陽系内では必須

光行差

- Bradley (1727)
- 光速度の有限性の影響
 - 例: 列車の窓の雨滴
- 光行差のベクトル表現

$$\mathbf{d}' = \frac{-(\mathbf{V}_1 - \mathbf{v}_1)}{|\mathbf{V}_1 - \mathbf{v}_1|} = \frac{\mathbf{d} + \mathbf{v}_1/c}{|\mathbf{d} + \mathbf{v}_1/c|} \approx \mathbf{d} + \frac{\mathbf{v}_1 - (\mathbf{d} \cdot \mathbf{v}_1)\mathbf{d}}{c}$$

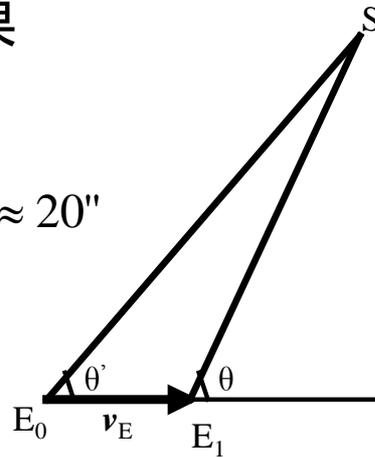
年周光行差

- 地球の軌道運動の効果
- (年周)光行差定数

$$\kappa \equiv \frac{v_E}{c} \approx \frac{30 \text{ km/s}}{3 \times 10^5 \text{ km/s}} = 10^{-4} \approx 20''$$

- 光行差の角度表現

$$\theta' \cong \theta - \kappa \sin \theta$$



年周光行差(続き)

- 黄道座標系が便利
- 近似公式
$$\begin{cases} \Delta_A \beta \approx \kappa \sin \beta \sin(L - \lambda) \\ (\cos \beta) \Delta_A \lambda \approx -\kappa \cos(L - \lambda) \end{cases}$$
- 太陽の平均黄経 L
- 光行差楕円
$$\left(\frac{(\cos \beta) \Delta_A \lambda}{\kappa} \right)^2 + \left(\frac{\Delta_A \beta}{\kappa \sin \beta} \right)^2 = 1$$

日周光行差

- 地球自転の効果：赤道座標系が便利
- 日周光行差定数

$$\kappa' \equiv \frac{R_E \omega_E}{c} \approx \frac{480 \text{ m/s}}{3 \times 10^8 \text{ m/s}} = 1.6 \times 10^{-6} \approx 0.3''$$

- 近似公式 $\begin{cases} \Delta'_A \delta \approx \kappa' \cos \phi \sin \delta \sin(\Theta - \alpha) \\ (\cos \delta) \Delta'_A \alpha \approx -\kappa' \cos \phi \cos(\Theta - \alpha) \end{cases}$
- 恒星時回転角： Θ 、球近似 地心緯度： ϕ

視差

- Bessel (1838): 81 Cyg
- 観測者の位置の平均値からのずれ
 - 例: 左右の目で見たときの方向差
- 視差のベクトル公式

$$\mathbf{d} = \frac{\mathbf{R}}{R} = \frac{\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1}{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_1|} = \frac{\mathbf{d}_0 - \mathbf{x}_1/r_0}{|\mathbf{d}_0 - \mathbf{x}_1/r_0|} \approx \mathbf{d}_0 - \frac{\mathbf{x}_1 - (\mathbf{d}_0 \cdot \mathbf{x}_1)\mathbf{d}_0}{r_0}$$

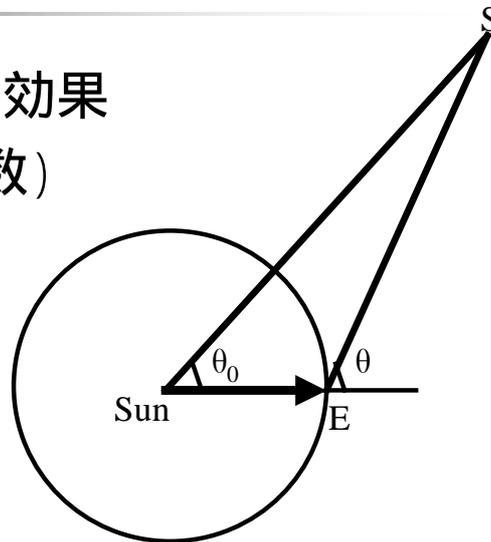
(年周) 視差

- 地球の軌道運動の効果
- 距離の代替量(逆数)

$$\pi \approx \frac{1 \text{ AU}}{r_0}$$

- 視差の角度表現

$$\theta \approx \theta_0 + \pi \sin \theta_0$$



年周視差(続き)

- 黄道座標系での近似公式

$$\begin{cases} \Delta_{\pi}\beta \approx \pi \sin \beta_0 \cos(L - \lambda_0) \\ (\cos \beta_0)\Delta_{\pi}\lambda \approx \pi \sin(L - \lambda_0) \end{cases}$$

- 光行差とは90°位相がずれることに注意

- 視差楕円
$$\left(\frac{(\cos \beta_0)\Delta_{\pi}\lambda}{\pi} \right)^2 + \left(\frac{\Delta_{\pi}\beta}{\pi \sin \beta_0} \right)^2 = 1$$

日周(地平)視差

- ごく近い天体だけ: 月、人工衛星
- 赤道座標系での近似公式

$$\begin{cases} \Delta'_\pi \delta \approx \pi' \cos \phi \sin \delta \cos(\Theta - \alpha) \\ (\cos \delta) \Delta'_\pi \alpha \approx \pi' \cos \phi \sin(\Theta - \alpha) \end{cases}$$

- 地平視差

$$\pi' \equiv \sin^{-1} \left(\frac{R_E}{r} \right) \approx \left(\frac{R_E}{1\text{AU}} \right) \pi \approx 4 \times 10^{-5} \pi$$

ドップラー偏移

- 古典 (= 非相対論) 近似

$$z \equiv \frac{\lambda_1 - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{(\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{d}}{c}$$

- 遠ざかる天体 = 赤方偏移
- 近づく天体 = 青方偏移

ドップラー偏移(続き)

- 光行差に類似: 偏移の大きさ = 光行差定数
- 年周偏移

$$\Delta z \approx \kappa \cos \beta \sin(L - \lambda)$$

- 日周偏移

$$\Delta z' \approx \kappa' \cos \phi \cos \delta \sin(\Theta - \alpha)$$

伝播遅延

- 真空遅延: 一般相対論による効果
 - 波長に依存しない
- 媒質遅延
 - 長波長(電波など)で顕著
 - 銀河間物質、恒星間物質、太陽コロナ
 - 地球上層: 電離層、対流層
 - 大気

波長依存遅延

$$\Delta\tau(f) = A + \frac{B}{f} + \frac{C}{f^2} + \dots$$

- 多波長観測による消去
 - 測地VLBI: S帯 + X帯
 - GPS: L1帯とL2帯
 - 人工衛星: アップ・リンク帯とダウン・リンク帯
- 経験的モデル
 - 太陽コロナ、電離層、対流層

遅延モデル

- 太陽コロナ (Muhleman and Anderson 1981)

$$\Delta\tau_{\text{CORONA}} = \frac{40.3}{cf^2} \int N_e ds \quad N_e = \frac{A}{r^6} + \dots$$

- 対流層による遅延 (Chao 1970): 天頂角 z

$$\Delta\tau_{\text{TROP}} = \frac{7\text{ns}}{\cos z + \frac{0.0014}{\cot z + 0.045}}$$

(大)気差

- 入射方向の天頂距離の変化

$$\Delta z = a \tan z + b \tan^3 z + \dots$$

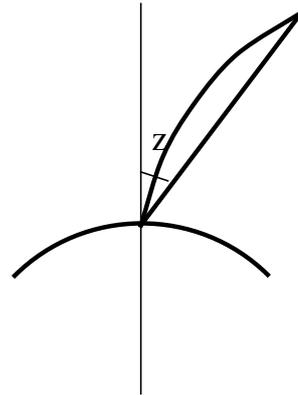
- Saastamoinen (1972)

$$a = 16''.271 \left(\frac{P - 0.156P_w}{T} \right)$$

P: 大気圧 (単位:hP)

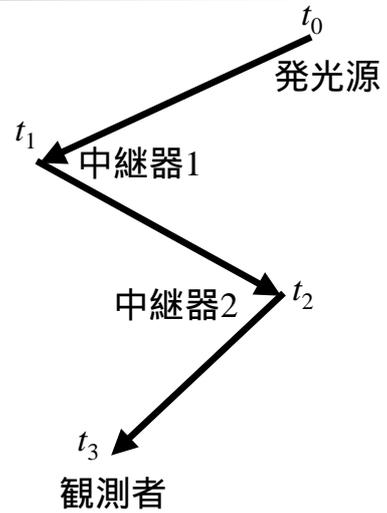
P_w : 水蒸気圧 (単位:hP)

T: 絶対温度 (単位:K)



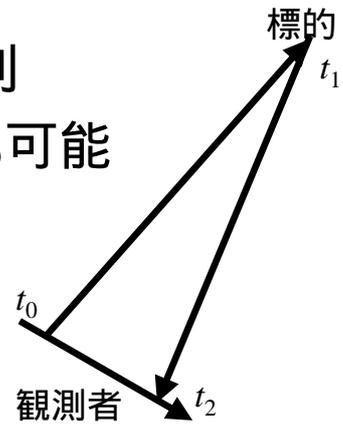
中継伝播

- 片道伝播の応用
- 一連の光差方程式
- 例: 2回中継 (t_3, t_2, t_1, t_0)
- 中継遅延
 - 光学: 0
 - 電波: 一定(中継器に固有)



往復伝播

- 能動観測の典型
- 観測量: 発光・受光時刻
- 標的の運動が未知でも可能
- 片道伝播の和
- 1次項の相殺



往復光差

- 反射時刻の近似

$$t_1 = \frac{t_0 + t_2}{2} + O\left(\left(\frac{v}{c}\right)^2 \left(\frac{t_2 - t_0}{2}\right)\right)$$

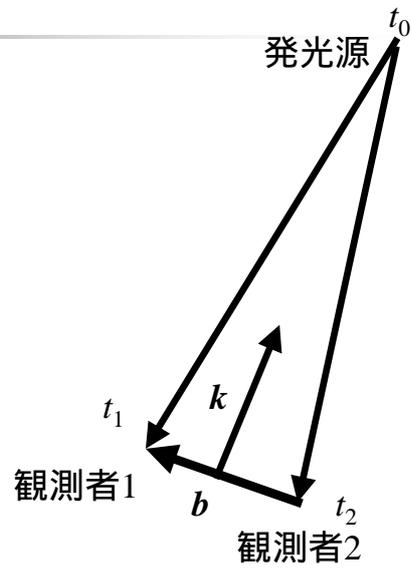
- 反射時距離の近似

$$R_{SO} = \frac{c(t_2 - t_0)}{2} \left[1 + O\left(\frac{v}{c}\right)^2 \right], R_{SO} = |\mathbf{x}_S(t_1) - \mathbf{x}_O(t_1)|$$

準同時伝播

- ほぼ同時の到着
- 光差方程式のペア
- 到着時刻差

$$\tau = t_2 - t_1$$



干渉観測方程式

- 観測者間の光差方程式の差
- 別名: VLBI観測方程式

$$c\tau = -\mathbf{b} \cdot \mathbf{k}$$

- 基線ベクトル $\mathbf{b} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$
- 中点方向ベクトル $\mathbf{k} = \frac{\mathbf{x}_0 - (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)/2}{|\mathbf{x}_0 - (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)/2|}$

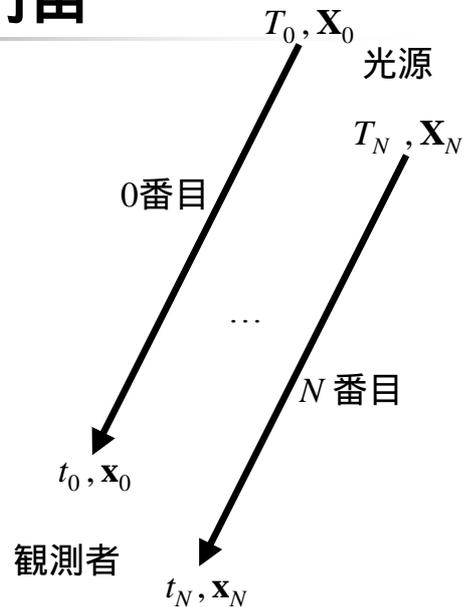
準規則的伝播

- ほぼ一定間隔の到着
- 一連の光差方程式
- 元期基準の到着時刻

$$\Delta t_N = t_N - t_0$$

- 仮定: 発射間隔一定

$$\Delta T_N = T_N - T_0 = N\Delta T$$



到着時刻観測方程式

- 元期の光差方程式との差
- 別名: パルサー時刻観測方程式

$$c\Delta t_N = cN\Delta T - \mathbf{B}_N \cdot \mathbf{K}_0 + O\left(\frac{B_N}{R_0}\right)$$

- 基線差ベクトル $\mathbf{B}_N = (\mathbf{x}_N - \mathbf{x}_0) - (\mathbf{X}_N - \mathbf{X}_0)$
- 元期方向ベクトル $\mathbf{K}_0 = \frac{\mathbf{X}_0 - \mathbf{x}_0}{|\mathbf{X}_0 - \mathbf{x}_0|}$

11. 最小二乗法

- Gauss (1801): 小惑星セレスの軌道決定
- 最適化問題の典型
- 目的関数

$$\Phi(\lambda) = \sum_j [f(t_j, \lambda) - g_j]^2$$

- 最小化 → 目的関数の偏微分 = 0
→ 線形方程式 (正規方程式)

最小二乗法の応用

- モデル推定によるデータ解析
 - 線形運動 ... 恒星の平均位置、固有運動
 - ケプラー楕円 ... 連星の軌道決定
 - ケプラー放物線 ... 彗星の軌道決定
 - 一定量のズレ ... 既存モデルの補正
 - モデル中の定数・パラメータ ... 重力場係数
 - 初期条件 ... 数値天体暦
 - 固有軌道要素 ... 解析的軌道理論

ゼロ偏微分

- 最適化 = ゼロ偏微分 $\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_i} = 0$
- テイラー展開

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_i} \right) (\lambda) = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \lambda_i} \right)_0 + \sum_j \left(\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \lambda_i \partial \lambda_j} \right)_0 \Delta \lambda_j + \dots$$

- ニュートン法による解法
- 正規方程式 $\mathbf{H} \Delta \vec{\lambda} = -\vec{b}$

正規方程式

- 係数(ヘス)行列 H = 正定値対称
- 定番解法: 修正コレスキー法
- [注意!] ランク落ち・縮退
- 対策
 - 一般逆行列(測地学で有名)
 - 直交基底展開
 - パラメータ間の相関をチェック
 - 良い初期推定

最小二乗法の拡張

- 重み付き最小二乗法
 - カイ二乗当てはめ
- 非線形最小二乗法
 - ガウス近似
- 力学系に伴う最小二乗法
 - 変分方程式の積分

推定誤差の見積もり

- 分散共分散行列 パラメータ間の相関
- ヘス行列の対角化
 - = 誤差楕円(体)の決定 $\sigma_j = \sqrt{\frac{2\Phi_0}{H_{jj}}}$
 - 目的関数の最小値
- 対角化しないと無意味
- 実用的な推定誤差: 非常に困難

12. 相対論効果

- 理論と原理
- ガリレイ近似
- ニュートン近似
- ポスト・ガリレイ近似
- ポスト・ニュートン近似
- 慣性系の引きずり

相対性理論

- 特殊相対論 (STR)
- 一般相対論 (GTR)
- 他の重力理論
 - Brans-Dicke, Nordvegt, Ng, ...
 - スカラー・ベクトル、スカラー・テンソル、...
 - パラメータ化ポスト・ニュートン (PPN)近似

原理

- 特殊相対論
 - 特殊相対性原理
 - 光速度一定の原理
 - (特殊相対論の)一致の原理
- 一般相対論
 - 一般相対性原理
 - 等価原理
 - (一般相対論の)一致の原理

一致の原理

- あまり語られないが重要
- 特殊相対論
 - 光速度 の極限でニュートン力学に一致
- 一般相対論
 - 光速度 の極限で万有引力理論に一致
 - 重力0の極限で特殊相対論に一致

四次元時空

- 3+1次元

$$x^\mu \quad (\mu = 0, 1, 2, 3) \quad x^0 = ct$$

- 計量テンソル

$$(ds)^2 = \sum_{\mu, \nu=0}^3 g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

固有時

- 定義 $c^2 (d\tau)^2 = -(ds)^2$

- 観測者とともに運動する時計の読み

- 四次元速度

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}$$

ガリレイ近似計量

$$g_{\mu\nu} \cong \eta_{\mu\nu} \equiv \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{G} \cong \underline{H} = \begin{pmatrix} -1 & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}$$

ローレンツ変換

- 基本公式 (空間1次元)

$$\begin{pmatrix} c\hat{\Delta t} \\ \Delta\hat{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh \psi & \sinh \psi \\ \sinh \psi & \cosh \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c\Delta t \\ \Delta x \end{pmatrix} \quad \psi = \tanh^{-1} \frac{v}{c}$$

- 一般公式 (空間3次元)

$$\underline{L} = \begin{pmatrix} \cosh \psi & (\sinh \psi) \mathbf{n}^T \\ (\sinh \psi) \mathbf{n} & (\cosh \psi) \mathbf{n} \otimes \mathbf{n} \end{pmatrix} \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{v}}{v}$$

ポアンカレ変換

- ローレンツ変換の自然な拡張

$$x^{\hat{\alpha}}(x^{\mu}) = x^{\hat{\alpha}}_0 + P_{\mu}^{\hat{\alpha}} x^{\mu}$$

- 原点平行移動 + ローレンツ変換 + 回転

$$\underline{P} = \underline{L}\underline{R} \quad \underline{R} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{R} \end{pmatrix}$$

ニュートン近似計量

- ニュートン重力ポテンシャル ϕ
 - 符号に注意 $\phi > 0$

$$\underline{G} \cong \begin{pmatrix} -1 + \frac{2\phi}{c^2} & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}$$

時計の遅れ

- ニュートン近似

$$\frac{d\tau}{dt} \approx 1 - \frac{1}{c^2} \left(\phi + \frac{v^2}{2} \right) = 1 - \frac{\phi_{\text{eff}}}{c^2}$$

- ローレンツ遅れ: 運動する時計は遅れる
- 重力遅れ: 重力下の時計は遅れる
- 有効ポテンシャルの意味

波長の偏移

- 位相: ゲージ不変量 座標系に非依存

$$\Delta\theta = 0 \Rightarrow \frac{\Delta\omega}{\omega} = \frac{\Delta f}{f} = \frac{-\Delta\tau}{\tau}$$

- 2次ローレンツ偏移
- 重力(赤方)偏移

ポスト・ガリレイ近似計量

$$\underline{G} \cong \begin{pmatrix} -1 + \frac{2\phi}{c^2} & \mathbf{0}^T \\ \mathbf{0} & \left(1 + \frac{2\gamma\phi}{c^2}\right) \mathbf{I} \end{pmatrix}$$

PPN形式

- C.F. Will (1981)
- Parametrized Post-Newtonian (PPN)
- PPNパラメーター: $\alpha=1, \beta, \gamma, \dots$
- $\alpha=1$
 - 等価原理
 - (一般相対論の)一致の原理の一つ

PPNパラメーター

- 一般相対論(GTR): $\gamma = \beta = 1$, 他は0
- γ : 重力場の非線形性
- β : 空間曲率
- 全ての実験結果が一般相対論を支持
 - $\gamma = 1.00$: 惑星の運動
 - $\beta = 1.000$: 太陽重力場による電波曲がり

測地線

- 「等速直線運動」の拡張
 - 一般相対論における慣性の法則の拡張
- 時間的測地線 = 一般粒子の運動経路
- 長さゼロ測地線 = (静止)質量ゼロの粒子の運動経路
 - 光子
- 空間的測地線 : 座標系の空間軸

測地線方程式

- 等価原理
 - 「重力は(通常の意味での)力ではない」
- 自由落下粒子の運動経路 = 測地線
- 時間的測地線方程式

$$a^{\mu} = \frac{du^{\mu}}{d\tau} + \Gamma_{\nu\rho}^{\mu} u^{\nu} u^{\rho} = 0$$

クリストッフェル記号

- テンソル量ではない = 座標系依存
 - 座標変換で(一点で)消去可能
- 重力加速度の拡張

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\lambda} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} \left(\frac{\partial g_{\rho\nu}}{\partial x^{\mu}} + \frac{\partial g_{\mu\rho}}{\partial x^{\nu}} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^{\rho}} \right)$$

- 逆計量行列 $g^{\lambda\mu} g_{\mu\nu} = \delta^{\lambda}_{\nu}$

光子の運動方程式

- 光子の運動経路 = 長さ0測地線

$$\frac{dk^\mu}{d\lambda} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu k^\nu k^\rho = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{0} + \left(\frac{1+\gamma}{c^2} \right) \left[\mathbf{a} - \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{v}}{c^2} \right]$$

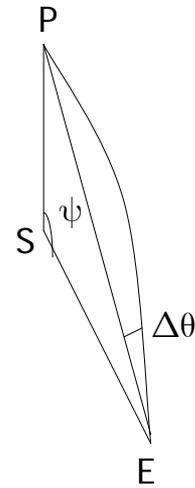
- ニュートン重力加速度ベクトル: a
- 解法: 逐次近似

重力レンズ

- 重力場 = 凸レンズ
- 屈折角

$$\Delta\theta = \frac{(1+\gamma)\mu_S}{c^2 r_{SE}} \tan \frac{\psi}{2}$$

- 大屈折: 1 ~ 3個の虚像、リング
- 分解不能 増光 = マイクロレンズ
 - MACHOの検出

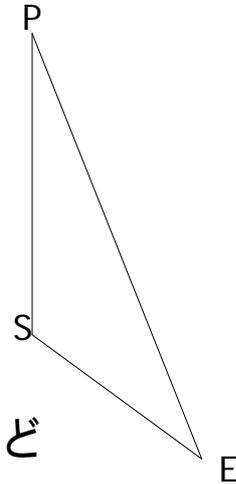


重力遅延

- シャapiro効果 (Shapiro 1964)

$$\Delta\tau = \frac{(1+\gamma)\mu_S}{c^3} \log\left(\frac{r_{SE} + r_{SP} + r_{PE}}{r_{SE} + r_{SP} - r_{PE}}\right)$$

- 惑星レーダー爆撃
- パルサー時刻観測
 - 太陽系天体: 太陽、木星、地球など
 - 連星パルサー: 伴星



ポスト・ニュートン近似 計量

- 非線形スカラー・ポテンシャル $\Phi = \beta\phi^2 + \dots$
- ベクトル(重力磁場)・ポテンシャル \mathbf{g}

$$\underline{G} \cong \begin{pmatrix} -1 + \frac{2\phi}{c^2} + \frac{2\Phi}{c^4} & \frac{\mathbf{g}^T}{c^3} \\ \frac{\mathbf{g}}{c^3} & \left(1 + \frac{2\gamma\phi}{c^2}\right)\mathbf{I} \end{pmatrix}$$

四次元加速度

- 四次元加速度

$$a^\mu \equiv \frac{Du^\mu}{d\tau} = \frac{du^\mu}{d\tau} + \Gamma_{\nu\rho}^\mu u^\nu u^\rho$$

- 絶対微分D
- 固有(= 静止)質量 m
- 四次元力 $f^\mu = ma^\mu$

ポスト・ニュートン近似 の運動方程式

- EIH (Einstein, Infeld, Hoffmann) 方程式

$$\frac{d\mathbf{v}_K}{dt} = \mathbf{a}_K + \frac{1}{c^2} \sum_{J \neq K} \left(\frac{\mu_J}{r_{JK}} \right) \left[\frac{A_{JK} \mathbf{r}_{JK} + B_{JK} \mathbf{v}_{JK}}{r_{JK}^2} + (3 + 4\gamma) \mathbf{a}_J \right]$$
$$\mathbf{a}_K = \sum_{J \neq K} \frac{\mu_J \mathbf{r}_{JK}}{r_{JK}^3}, \quad \mathbf{r}_{JK} = \mathbf{r}_J - \mathbf{r}_K$$

EIH方程式(続き)

$$\mathbf{v}_{JK} = \mathbf{v}_J - \mathbf{v}_K,$$

$$A_{JK} = -2(\beta + \gamma) \sum_{L \neq K} \frac{\mu_L}{r_{KL}} - (2\beta - 1) \sum_{L \neq J} \frac{\mu_L}{r_{JL}} + \gamma \mathbf{v}_K^2 \\ + (1 + \gamma) \mathbf{v}_J^2 - 2(1 + \gamma) \mathbf{v}_J \cdot \mathbf{v}_K - \frac{3}{2} \left(\frac{\mathbf{r}_{JK} \cdot \mathbf{v}_J}{r_{JK}} \right)^2 + \frac{\mathbf{r}_{JK} \cdot \mathbf{a}_J}{2},$$

$$B_{JK} = \mathbf{r}_{JK} \cdot \left[(2 + 2\gamma) \mathbf{v}_K - (1 + 2\gamma) \mathbf{v}_J \right]$$

慣性系の引きずり

- 局所的な原点平行移動 \neq 大局的な非回転
 - コリオリ力なし \neq 遠いクェーサーに対して静止
- フェルミ移動
 - 平行移動の相対論的拡張
- 固有座標系 = フェルミ移動された座標系

慣性系の引きずり(続き)

- 固有座標系の回転角速度
- 特殊相対論: トーマス歳差 $\frac{\mathbf{v} \times \mathbf{a}}{c^3}$
- 一般相対論
 - 測地線歳差 $\frac{(1 + \gamma) \mathbf{v} \times \nabla \phi}{c^3}$
 - ~1.92秒角/世紀
 - ド・ジッター(1917)
 - レンズ・シリング効果 $\frac{\nabla \times \mathbf{g}}{c^3}$

参考文献

- Kovalevsky et al. (eds); 1989, *Reference Frames*, Kluwer Acad. Publ.
- Seidelmann (ed.); 1992, *Expl. Suppl. To Astr. Almanac*, Univ. Sci. Books.
- Soffel; 1989, *Relativity in Astrometry, Cele. Mech. & Geodesy*, Springer-Verlag.
- Woolard and Clemence; 1966, *Spherical Astronomy*, Acad. Press.

参考文献(続き)

- Kovalevsky and Seidelmann; 2004, *Fundamentals of Astronomy*, Cambridge Univ. Press.
- McCarthy and Petit (eds); 2004, *IERS Convention 2003*, IERS Tech. Note 32.
- Smart; 1956, *Spherical Astronomy*, Cambridge Univ. Press.

著者



- 福島登志夫
- 自然科学研究機構
国立天文台 (NAOJ)
- 181-8588 東京都三鷹市大沢2-21-1
- <http://chiron.mtk.nao.ac.jp/~toshio/>
- Toshio.Fukushima@nao.ac.jp