

天体力学III講義ノート

堀源一郎

Contents

1	質点系としての剛体	3
1.1	束縛条件	3
1.2	Newton の運動の法則	4
1.3	角運動量の保存	5
1.4	仕事とエネルギー	6
1.5	剛体の運動	7
2	慣性能率	9
2.1	慣性能率 (面, 線, 点に関する)	9
2.2	方向による I の変化	10
2.3	慣性楕円体の性質	12
2.3.1	$A \leq B \leq C$ i.e $a \geq b \geq c$	12
2.3.2	中心慣性楕円体	13
2.4	中心楕円体の座標軸	14
2.5	主点	18
2.5.1	中心楕円体が球	18
2.5.2	中心楕円体が球でないとき	19
2.6	回転の楕円体	21
3	オイラーの運動方程式	22
3.1	歴史	22
3.2	剛体の変位	22
3.2.1	固定軸の回りの回転による変位	22
3.2.2	剛体の変位 (一般的)	23
3.3	固定点の回りの運動	26
3.3.1	角速度	26
3.3.2	角運動量と運動エネルギー	27
3.3.3	i, j, k を慣性主軸にとる	29

3.3.4	$\vec{N} = MV\vec{r}_G\vec{g}$ の場合	32
3.3.5	支持点 O に働く束縛力	34
3.3.6	オイラー角の時間変化	38
3.3.7	$D = C$ の場合	40
3.3.8	$A = B < C$ (扁球)	41
3.3.9	Poinsot の方法	42
3.3.10	ポルホードとハーポルホード	45
4	正準方程式	47
4.1	オイラー角	47
4.2	Andoyer(アンドワイエ)変数	48
4.3	重心の回りの自由回転	52
4.3.1	$A = B$ の場合	52
4.3.2	$A \neq B < C$ の場合	52
4.4	有限2体問題	56
4.4.1	M_2 の公転運動	60
4.4.2	M_j の自転運動	61
4.5	U の展開	62
4.6	地球の自転運動	67
4.7	水星の自転運動	71
4.8	非剛体の効果	75

1 質点系としての剛体

1.1 束縛条件

束縛のある質点系として剛体を見る。

$$|\vec{r}_j - \vec{r}_k| = r_{jk} = \text{const.} \quad (1)$$

束縛条件の数

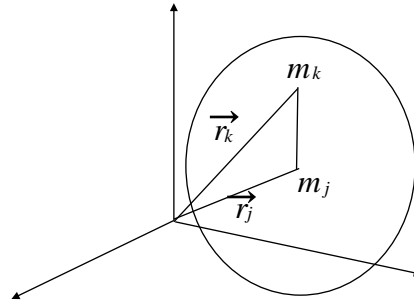


Figure 1: 質点系としての剛体

$${}_n C_2 = \frac{n(n-1)}{2} \quad (2)$$

独立な数は？

- 4 質点：

$${}_4 C_2 = 6 \quad (3)$$

すべて独立. 一辺だけを動かせる (Local に).

- 5 質点：

$${}_5 C_2 = 10 \quad (4)$$

すべて独立ではない. E は BCD からの距離で決まる. すると n 個

$$\begin{aligned} 6 + 4 & \quad \text{束縛} \\ 6 + 3 & \quad \text{独立な束縛} \end{aligned}$$

Table 1: 束縛

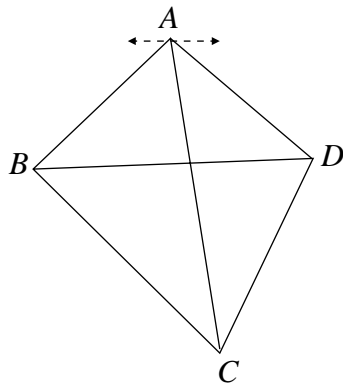


Figure 2: 4 質点

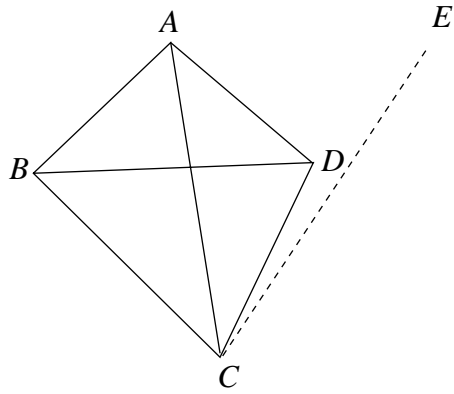


Figure 3: 5 質点

$$\text{束縛: } 6 + 4 + 5 + \cdots + n - 1 = \frac{n(n-1)}{2} \quad (5)$$

$$\text{独立な束縛 } 6 + \underbrace{3 + 3 + \cdots + 3}_{n-4} = 3n - 6 \quad (6)$$

よって，剛体の自由度は，

$$3n - (3n - 6) = 6 \quad (7)$$

$$6 = \underbrace{3}_{\text{重心の位置}} + \underbrace{2}_{\text{軸方向}} + \underbrace{1}_{\text{回転}} \quad (8)$$

1.2 Newton の運動の法則

$$m_j \vec{r}_j = \vec{f}_j \quad (9)$$

$$\vec{f}_j = \underbrace{\vec{f}_j^{(i)}}_{\text{質点同士の間}} + \vec{f}_j^{(e)} \quad (10)$$

$$\vec{f}_j^{(i)} = \sum_{k \neq j} \vec{f}_{jk} \Rightarrow \text{束縛力} \quad (11)$$

$$\vec{f}_{jk} = -\vec{f}_{kj} \propto \vec{r}_j - \vec{r}_k \quad (12)$$

よって、束縛力は¹、

$$\sum \vec{f}_j^{(i)} = 0 \quad \text{定義より} \quad (13)$$

重心の運動²

$$M\vec{r}_G = \vec{f}_j^{(e)} = \text{vec}f \quad (14)$$

$$\frac{d}{dt}(M\dot{\vec{r}}_G) = \vec{f} \quad (15)$$

1.3 角運動量の保存

$$\sum m_j(\vec{r}_j \times \dot{\vec{r}}_j) = \sum \vec{r}_j \times \dot{\vec{f}}_j^{(i)} + \sum \vec{r}_j \times \dot{\vec{f}}_j^{(e)} = \sum \vec{r}_j \times \dot{\vec{f}}_j^{(e)} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \sum (\vec{r}_j \times \dot{\vec{f}}_j) &= \sum_{j>k} \vec{r}_j \times \dot{\vec{f}}_j + \sum_{k>j} \vec{r}_k \times \dot{\vec{f}}_k \\ &= \sum_{j>k} \vec{r}_j \times \dot{\vec{f}}_j - \sum_{k>j} \vec{r}_j \times \dot{\vec{f}}_j \\ &= \sum_{j>k} (\vec{r}_{j+k} - \vec{r}_{j-k}) \times \dot{\vec{f}}_{j+k} \quad (k \rightarrow -k) \\ &= \sum (\vec{r}_{j-k} - \vec{r}_{j+k}) \times \dot{\vec{f}}_{j-k} \quad (\dot{\vec{f}}_{j+k} = -\dot{\vec{f}}_{j-k}) \\ &= \sum (\vec{r}_k \times \dot{\vec{f}}_k) = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

よって、

$$\frac{d}{dt} \left(\sum_j m_j \vec{r}_j \times \dot{\vec{r}}_j \right) = \sum_j (\vec{r}_j \times \dot{\vec{f}}_j) \quad (18)$$

$$\vec{G} = \vec{N} \quad (19)$$

原点に対する Moment の保存. 勿論, 単位ベクトルとの内積を取れば, 固定軸 $A(\vec{a})$ について軸まわりの Moment の保存.

$$\vec{a} \cdot \vec{G} = \vec{a} \cdot \vec{N} \quad (20)$$

\vec{N} に直交な軸のまわりの Moment は保存される.

さらに, 重心を通る軸の回りに Moment は保存される (重心は動いても良い. 固定軸ではない).

$$(21)$$

¹ 束縛力の大きさは剛体の運動によって変わる.

² 分裂すれば \vec{r}_j が変わるので, $\vec{f}_j^{(e)}$ が異なるので, 重心の運動は変わる.

$$\begin{aligned}\vec{r}_j &= \vec{r}_G + \vec{\rho}_j \\ \vec{r}_j \times \vec{r}_j &= \vec{r}_G \times \vec{r}_G + \vec{r}_G \times \vec{\rho}_j + \vec{\rho}_j \times \vec{r}_G + \vec{\rho} \times \vec{\rho}_j\end{aligned}$$

$\sum m_j$ を施すと,

$$\begin{aligned}\sum m_j (\vec{r}_j \times \vec{r}_j) &= M\vec{r}_G \times \vec{r}_G + \sum m_j \vec{\rho}_j \times \vec{\rho}_j \\ &(\sum m_j \vec{r}_G = 0, \quad \sum \vec{r}_G = 0)\end{aligned}\tag{22}$$

$\frac{d}{dt}$ を施して,

$$\begin{aligned}M\vec{r}_G \times \vec{r}_G + \frac{d}{dt} \sum m_j r \vec{h} o_j \times \vec{\rho}_j \\ = \vec{r}_G \times \sum_j \vec{f}_j^{(e)} + \sum_j \vec{\rho}_j \times \vec{f}_j^{(e)} \\ M\vec{r}_G = \sum \vec{f}_j^{(e)} = \vec{f}\end{aligned}$$

より,

$$\frac{d}{dt} \sum m_j (\vec{\rho}_j \times \vec{\rho}_j) = \sum \vec{\rho}_j \times \vec{f}_j^{(e)}\tag{23}$$

1.4 仕事とエネルギー

(10) より,

$$\sum m_j \vec{r}_j \cdot \dot{\vec{r}}_j = \sum (\vec{r}_j \cdot \vec{f}_j^{(i)} + \vec{r}_j \cdot \vec{f}_j^{(e)})\tag{24}$$

t で積分して,

$$\frac{1}{2} \sum m_j (\vec{r}_j)^2 - \frac{1}{2} (\sum m_j \vec{r}_j)_0^2 = \int_0^t \sum \left(\underbrace{\vec{r}_j \cdot \vec{f}_j^{(i)}}_{\neq 0} + \vec{r}_j \cdot \vec{f}_j^{(e)} \right) dt\tag{25}$$

これはエネルギーの保存. $\vec{r}_j = \vec{r}_G + \vec{\rho}_j$ と置くと,

$$(\vec{r}_j)^2 = \vec{r}_G^2 + 2\vec{r}_G \cdot \vec{\rho}_j + \vec{\rho}_j^2\tag{26}$$

代入すれば,

$$\frac{1}{2} \sum m_j (\vec{r}_j)^2 = \underbrace{\frac{1}{2} M (\vec{r}_G)^2}_{\text{外部運動エネルギー}} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum m_j (\vec{\rho}_j)^2}_{\text{内部運動エネルギー}}\tag{27}$$

(14) より,

$$M\vec{r}_G \cdot \dot{\vec{r}}_G = \sum \vec{r}_G \cdot \vec{f}_j^{(e)}\tag{28}$$

代入すれば,

$$\underbrace{\frac{1}{2}M\vec{r}_G^2 - \left(\frac{1}{2}M\vec{r}_G\right)_0^2}_{\text{外部運動エネルギーの変化}} = \underbrace{\int \sum \vec{f}_j^{(e)} d\vec{r}_G}_{\text{外力が重心の変化に対して行った外部仕事}} \left(\frac{d\vec{r}_G}{dt} dt = d\vec{r}_G\right) \quad (29)$$

外部運動エネルギーの変化 外力が重心の変化に対して行った外部仕事

(25) の右辺,

$$\begin{aligned} & \int \sum (\vec{f}_j^{(i)} + \vec{f}_j^{(e)}) \cdot (d\vec{r}_G + d\vec{\rho}_j) \\ = & \underbrace{\int \sum \vec{f}_j^{(i)} \cdot d\vec{r}_G}_{=0} + \underbrace{\int \sum \vec{f}_j^{(e)} \cdot d\vec{r}_G}_{\text{外力の外部仕事}} + \underbrace{\int \sum (\vec{f}_j^{(i)} + \vec{f}_j^{(e)}) \cdot d\vec{\rho}_j}_{\text{内部仕事}} \end{aligned} \quad (30)$$

$$\int \sum \vec{f}_j^{(i)} \cdot d\vec{\rho}_j \quad \text{内力の内部仕事} \quad (31)$$

$$\int \sum \vec{f}_j^{(e)} \cdot d\vec{\rho}_j \quad \text{内力の外部仕事} \quad (32)$$

これより,

$$\underbrace{\frac{1}{2} \sum m_j \vec{\rho}_j^2 - \frac{1}{2} \left(\sum m_j \vec{\rho}_j \right)_0^2}_{\text{内部運動エネルギーの変化}} = \underbrace{\int \sum (\vec{f}_j^{(i)} + \vec{f}_j^{(e)}) \cdot d\vec{\rho}_j}_{\text{内部仕事}} \quad (33)$$

剛体では,

$$\int \sum \vec{f}_j^{(i)} \cdot d\vec{\rho}_j = 0 \quad (34)$$

太陽系に働く外力では, 平行とみなせるので,

$$\vec{f}_j^{(e)} = m_j \vec{f} \rightarrow \int \sum \vec{f}_j^{(e)} \cdot d\vec{\rho}_j = \vec{f} \cdot \int m_j d\vec{\rho}_j = 0 \quad (35)$$

内部に対して仕事はしない. ただし, 近くを恒星が通るときは別である.

1.5 剛体の運動

(14) より,

$$M\vec{r}_G = \vec{f} \left(= \sum \vec{f}_j^{(e)} \right) \quad (36)$$

- 偶力は重心の運動に関与しない.
- 放物体の重心は放物線を描く

$$\vec{f}_j^{(e)} = -k^2 m_j \vec{r}_j \quad (37)$$

のとき³,

$$M\vec{r}_G = -k^2 M\vec{r}_G \Rightarrow \ddot{\vec{r}}_G = -k^2 \vec{r}_G \quad (\text{harmonic motion}) \quad (38)$$

³ $f \propto \frac{1}{r^2}$ のときはこうは行かない.

(19) から,

$$\begin{aligned}\vec{G} &= \sum m_j (\vec{r}_j \times \dot{\vec{r}}_j) \\ &= M (\vec{r}_G \times \dot{\vec{r}}_G) + \sum m_j (\vec{\rho}_j \times \dot{\vec{\rho}}_j)\end{aligned}\quad (39)$$

特に,

- $\vec{f}_j^{(e)}$ の性質: $\vec{f} = \sum m_j \vec{f}_j^{(e)}$ が剛体の向きによらないならば, 並進運動 (重心の運動) は自転に影響されない (\vec{f} にのみよるから).

また,

- $\text{vec}G$ が剛体の位置 (重心の位置) によらないならば, 自転は並進運動に影響されない.

(29) から,

$$\frac{1}{2} M \dot{\vec{r}}_G^2 \Big|_0^t = \int_0^t \vec{f} \cdot d\vec{r}_G \quad (40)$$

剛体の自由落下,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} M (v^2 - v_0^2) &= \int_0^t M \vec{g} \cdot d\vec{r}_G \\ &= Mg \int dh = Mg \underbrace{h}_{\text{落差}}\end{aligned}\quad (41)$$

(33) から,

$$\frac{1}{2} \sum m_j \dot{\vec{\rho}}_j^2 \Big|_0^t = \int_0^t \sum \vec{f}_j^{(e)} \cdot d\vec{\rho}_j \quad (42)$$

すなわち, 剛体では内部の内部仕事はゼロ.

$$\vec{f}_j^{(i)} = \sum_k \vec{f}_{jk}, \quad \vec{f}_{jk} = -\vec{f}_{kj} \quad (43)$$

\vec{f}_{jk} と \vec{f}_{kj} がなす仕事を W_{jk} とすると,

$$dW_{jk} = \vec{f}_{jk} \cdot d\vec{\rho}_j + \vec{f}_{kj} \cdot d\vec{\rho}_k = \vec{f}_{jk} (d\vec{\rho}_j - d\vec{\rho}_k) \quad (44)$$

$(\vec{\rho}_j - \vec{\rho}_k)^2 = \text{一定}$ だから (束縛力の定義),

$$(\vec{\rho}_j - \vec{\rho}_k) \cdot (\dot{\vec{r}}_j - \dot{\vec{r}}_k) = 0 \quad (45)$$

よって,

$$\vec{f}_{jk} \propto \vec{r}_j - \vec{r}_k = \vec{\rho}_j - \vec{\rho}_k \Rightarrow \vec{f}_{jk} \cdot (\vec{\rho}_j - \vec{\rho}_k) = 0 \quad (46)$$

したがって,

$$dW_{jk} = 0 \Rightarrow \int \sum \vec{f}_j^{(i)} \cdot d\vec{\rho}_j = \sum_{j>k} W_{jk} = 0 \quad (47)$$

外力の $\begin{pmatrix} \text{外部} \\ \text{内部} \end{pmatrix}$ 仕事は, 剛体の $\begin{pmatrix} \text{外部} \\ \text{内部} \end{pmatrix}$ 運動エネルギーの変化に等しい.

2 慣性能率

2.1 慣性能率（面，線，点に関する）

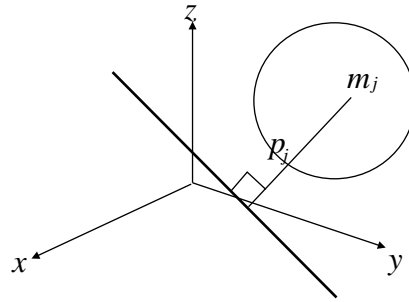


Figure 4: 慣性能率

$$I = \sum m_j p_j^2, \quad p_j : m_j \text{ と面，線，点との距離} \quad (48)$$

面：

$$I_{yz} = \sum m_j x_j^2, \quad I_{zx} = \sum m_j y_j^2, \quad I_{xy} = \sum m_j z_j^2 \quad (49)$$

軸：⁴

$$\left. \begin{aligned} A &\equiv I_x = \sum m_j (y_j^2 + z_j^2) = I_{zx} + I_{xy} \\ B &\equiv I_y = \sum m_j (z_j^2 + x_j^2) = I_{xy} + I_{yz} \\ C &\equiv I_z = \sum m_j (x_j^2 + y_j^2) = I_{yz} + I_{zx} \end{aligned} \right\} \quad (50)$$

原点：

$$I_0 = \sum m_j (x_j^2 + y_j^2 + z_j^2) = I_{xy} + I_{yz} + I_{zx} = \frac{1}{2}(A + B + C) \quad (51)$$

慣性積：

$$\left. \begin{aligned} D &\equiv P_x = \sum m_j y_j z_j \\ E &\equiv P_y = \sum m_j z_j x_j \\ F &\equiv P_z = \sum m_j x_j y_j \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

これより直ちに，

$$I_x > 2P_x, \quad I_y > 2P_y, \quad I_z > 2P_z, \quad I_0 > P_x + P_y + P_z \quad (53)$$

⁴

$$I_{xy} = \frac{A+B+C}{2} - C, \quad I_{yz} = \frac{A+B+C}{2} - A, \quad I_{zx} = \frac{A+B+C}{2} - B$$

回転半径 : k_*

$$I_* = Mk_*^2 \quad \text{なる} \quad k_*, \quad M \sum m_j \quad (54)$$

k_* は I_* による.

主回転半径 : k_0 面, 線, 点が重心を含むとき $k_* = k_0$. 平行に p だけ動かせば

$$k^2 = k_0^2 + p^2 \rightarrow k \geq k_0 \quad (55)$$

ただちに,

$$I \geq I_p, \quad I = Mk^2, \quad I_p = Mk_0^2 \quad (56)$$

よって, 平行移動で I_p を minimum にするには重心を通れば良い.

2.2 方向による I の変化

回転移動で I はどう変わるか?

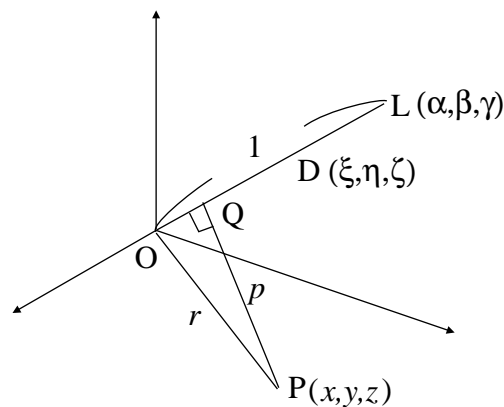


Figure 5: 方向による I の変化

$$\begin{aligned} p^2 &= r^2 - \overline{OQ}^2 \\ &= (x^2 + y^2 + z^2) \underbrace{(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2)}_{=1} - (\alpha x + \beta y + \gamma z)^2 \\ &= \alpha^2(y^2 + z^2) + \beta^2(z^2 + x^2) + \gamma^2(x^2 + y^2) - 2\beta\gamma yz - 2\gamma\alpha zx - 2\alpha\beta zy \quad (57) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_L &= \sum mp^2 \\ &= A\alpha^2 + B\beta^2 + C\gamma^2 - 2D\beta\gamma - 2E\gamma\alpha - 2F\alpha\beta \\ &= \frac{M\ell^4}{\overline{OD}^2}, \quad \ell : \text{代表的な長さ} \quad (58) \end{aligned}$$

これを満たす \bar{OD} が決まる。D は方向 L によって決まる。この D 点の軌跡は⁵,

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 - 2D\eta\zeta - 2E\xi\zeta - 2F\xi\eta = M\ell^4 \quad (59)$$

これは $A, B, C > 0$ より, 楕円面を表す。これを慣性楕円体という。これを主軸変換すれば $D, E, F = 0$ となる。

慣性主軸 : (59) を,

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = 0 \quad (60)$$

とかく。主軸と楕円面の交点では,

$$\vec{r} \parallel \vec{n}, \quad \vec{n} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}, \frac{\partial \varphi}{\partial \eta}, \frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} \right), \quad \vec{r} = (\xi, \eta, \zeta) \quad (61)$$

よって,

$$\frac{A\xi - E\zeta - F\eta}{\xi} = \frac{B\eta - D\zeta - F\xi}{\eta} = \frac{C\zeta - D\eta - E\xi}{\zeta} \quad (62)$$

\bar{OD} で割って⁶,

$$I_L = \frac{A\alpha - E\gamma - F\beta}{\alpha} = \frac{B\beta - D\gamma - F\alpha}{\beta} = \frac{C\gamma - D\beta - E\alpha}{\gamma} \quad (63)$$

よって,

$$\begin{pmatrix} A - I_L & -F & -E \\ -F & B - I_L & -D \\ -E & -D & C - I_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 0 \quad (64)$$

Non-trivial より $\det = 0$,

$$\begin{vmatrix} A - I_L & -F & -E \\ -F & B - I_L & -D \\ -E & -D & C - I_L \end{vmatrix} = 0 \quad (65)$$

これは3つの正根をもつ : I_1, I_2, I_3

$I = I_j, (\alpha_j, \beta_j, \gamma_j)$ とおくと,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\alpha_j}{\gamma_j} &= \frac{D(B - I_j) + DF}{(A - I_j)(B - I_j) - F^2} = a_j \\ \frac{\beta_j}{\gamma_j} &= \frac{D(A - I_j) + EF}{(A - I_j)(B - I_j) - F^2} = b_j \\ \alpha_j^2 + \beta_j^2 + \gamma_j^2 &= 1 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} \alpha_j &= \pm \frac{a_j}{\sqrt{a_j^2 + b_j^2 + 1}} \\ \beta_j &= \pm \frac{b_j}{\sqrt{a_j^2 + b_j^2 + 1}} \\ \gamma_j &= \pm \frac{1}{\sqrt{a_j^2 + b_j^2 + 1}} \end{aligned} \quad (66)$$

5

$$\alpha \cdot \bar{OD} = \xi, \quad \beta \cdot \bar{OD} = \eta, \quad \gamma \cdot \bar{OD} = \zeta$$

6

$$\frac{(\quad)\alpha + (\quad)\beta + (\quad)\gamma}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} = (\quad)\alpha + (\quad)\beta + (\quad)\gamma = L_L$$

このとき,

$$I_j = A\alpha_j^2 + B\beta_j^2 + C\gamma_j^2 - 2D\beta_j\gamma_j - 2E\gamma_j\alpha_j - 2F\alpha_j\beta_j > 0 \quad (67)$$

$x, y, z \longrightarrow x', y', z' \wedge$ 変換

$$\begin{array}{c|ccc} & x & y & z \\ \hline x' & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ y' & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ z' & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} A' = I_1 \\ B' = I_2 \\ C' = I_3 \\ D' = E' = F' = 0 \end{array} \right. \quad (68)$$

$$(19) \leftrightarrow I_L = I_1\alpha^2 + I_2\beta^2 + I_3\gamma^2 \quad (69)$$

この,

- x', y', z' を慣性主軸という.
- I_1, I_2, I_3 を主慣性能率という.
- $x'y', y'z', z'x'$ 面を主慣性面という.

主軸の長さの半分を a, b, c (主半径) とすると,

$$I_1 = \frac{M\ell^4}{a^2}, \quad I_2 = \frac{M\ell^4}{b^2}, \quad I_3 = \frac{M\ell^4}{c^2} \quad (70)$$

$a > b > c$ なら $I_1 < I_2 < I_3$

O が G に一致するとき中心 (central) と呼ぶ.

2.3 慣性楕円体の性質

2.3.1 $A \leq B \leq C$ i.e $a \geq b \geq c$

$$A + B \geq C \quad (71)$$

より,

$$\begin{aligned} \frac{1}{B} &\geq \frac{1}{C} \geq \frac{1}{A+B} \\ 1 - \frac{A}{B} &\leq 1 - \frac{A}{C} \leq 1 - \frac{A}{A+B} \\ \frac{B-A}{B} &\leq \frac{C-A}{C} \leq \frac{B}{A+B} \end{aligned} \quad (72)$$

よって⁷.

$$e_z^2 \leq e_y^2 \leq \frac{1}{2 - e_z^2} \quad (73)$$

e_z^2 given :

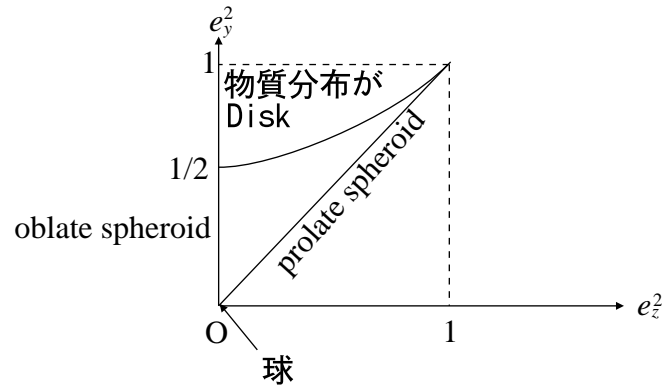


Figure 6: $e_z^2 - -e_y^2$

1. e_y^2 min. at $B = C$:
prolate spheroid (回転楕円体 : ハマキ型)
2. e_y^2 max. at $A + B = C$:
物質分布は Disk (円盤)
3. $e_z = 0$ at $A = B$:
oblate spheroid (回転楕円体 : パンケーキ型)

$$e_{z\max}^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{A}{C} \geq \frac{1}{2} \quad \text{i.e.} \quad \frac{c}{a} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{あまり平たくなれない} \quad (74)$$

2.3.2 中心慣性楕円体

z 軸が原点 O における慣性主軸である条件は,

$$D = \sum myz = 0, \quad E = \sum mzx = 0 \quad (75)$$

z 軸が O' における慣性主軸でもあるためには,

$$\sum my(z - h) = 0, \quad \sum m(z - h)x = 0 \quad (76)$$

これより,

7

$$e_z^2 = \frac{B - A}{B}$$

とおく.

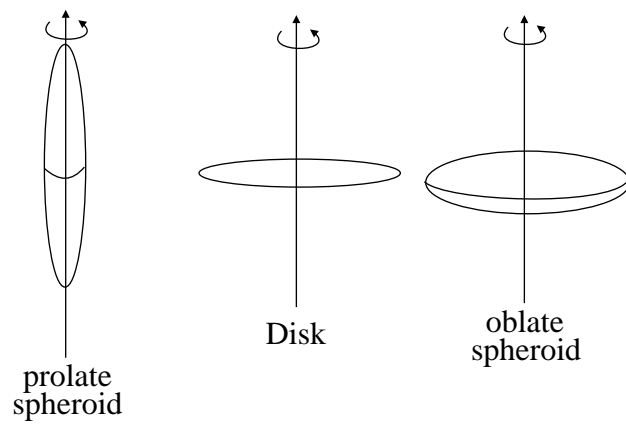


Figure 7: prolate spheroid, disk, oblate spheroid

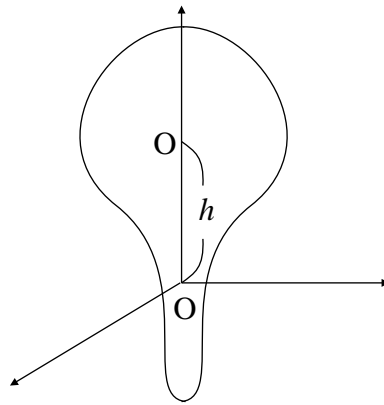


Figure 8: 中心慣性楕円体

$$h \sum my = h \sum mx = 0 \implies \sum my = \sum mx = 0 \quad (77)$$

z 軸は重心を通る. ある軸 ℓ が軸上の 2 点において各々主軸 $\rightarrow \ell$ は重心を通る.

2.4 中心楕円体の座標軸

平面 π :

$$u\xi + v\eta + w\zeta = 1 \quad (78)$$

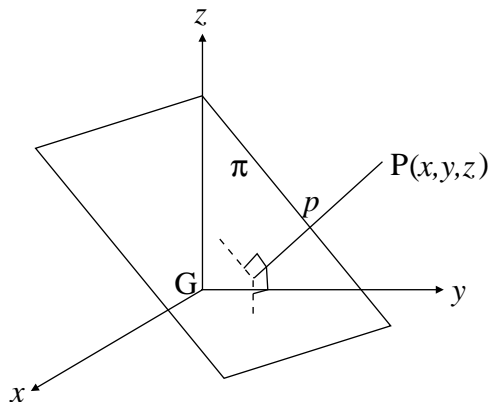


Figure 9: 中心慣性楕円体の座標軸

π に関する慣性能率 I_π を考える⁸ .

$$\begin{aligned} I_\pi &= \sum m p^2 = \sum m \frac{(ux + vy + wz - 1)^2}{u^2 + v^2 + w^2} \\ &= \frac{u^2 \sum m x^2 + v^2 \sum m y^2 + w^2 \sum m z^2 + M}{u^2 + v^2 + w^2} \end{aligned} \quad (79)$$

今, a, b, c を yz 面, zx 面, xy 面 (主慣性面) に関する回転半径とする.

$$\sum m x^2 = M a^2, \quad \sum m y^2 = M b^2, \quad \sum m z^2 = M c^2 \quad (80)$$

$I_\pi = M k^2$ とすると,

$$k^2 = \frac{u^2 a^2 + v^2 b^2 + w^2 c^2 + 1}{u^2 + v^2 + w^2} \quad (81)$$

この k を一定とする一群の面の包絡面を考えよう.

$$u^2(k^2 - a^2) + v^2(k^2 - b^2) + w^2(k^2 - c^2) = 1 \quad (82)$$

この包絡面は

$$\frac{\xi^2}{k^2 - a^2} + \frac{\eta^2}{k^2 - b^2} + \frac{\zeta^2}{k^2 - c^2} = 1 \quad (83)$$

となる. これは共焦点2次曲面と呼ばれるものである. $c^2 \leq b^2 \leq a^2$ とすると, k の値によって色々変わる.

1. $k^2 > a^2$: 楕円面
2. $b^2 < k^2 < a^2$: 一葉双曲面
3. $c^2 < k^2 < b^2$: 二葉双曲面

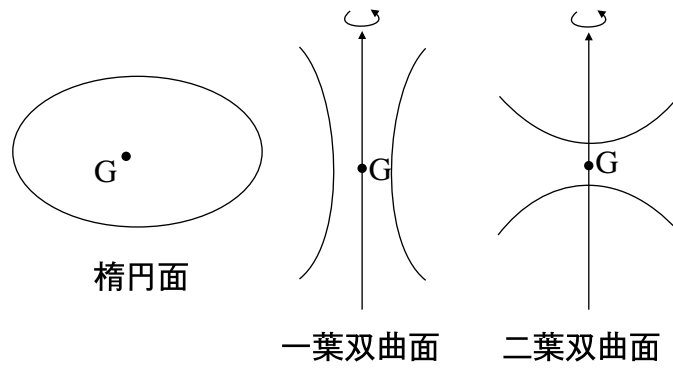


Figure 10: 共焦点2次曲面

(ξ, η, ζ) を与えて解くと (83) は3次方程式となる. $k^2 \Rightarrow 3$ つの正根が⁸得る: k_1^2, k_2^2, k_3^2 . 一般に,

$$c^2 < k_3^2 < b^2 < k_2^2 < a^2 < k_1^2 \quad (84)$$

この $P(\xi, \eta, \zeta)$ を通る k_1, k_2, k_3 に指定される3直交曲面の接平面は3枚存在する (これは包絡面を作る前の面と一致する). 接平面の方程式は⁹,

$$\left. \begin{aligned} \frac{\xi_0}{k_1^2 - a^2} \xi + \frac{\eta_0}{k_1^2 - b^2} \eta + \frac{\zeta_0}{k_1^2 - c^2} \zeta &= 1 \\ \frac{\xi_0}{k_2^2 - a^2} \xi + \frac{\eta_0}{k_2^2 - b^2} \eta + \frac{\zeta_0}{k_2^2 - c^2} \zeta &= 1 \\ \frac{\xi_0}{k_3^2 - a^2} \xi + \frac{\eta_0}{k_3^2 - b^2} \eta + \frac{\zeta_0}{k_3^2 - c^2} \zeta &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (85)$$

Binet の定理: $P(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$ における3つの主慣性面は P を通る3つの共焦点2次曲面に接し, また P における主慣性面における慣性能率の値は Mk_1^2, Mk_2^2, Mk_3^2 に等しい. ξ, η, ζ 軸へ座標変換する.

$$\xi = \xi_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z \quad (86)$$

$$\eta = \eta_0 + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z \quad (87)$$

$$\zeta = \zeta_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z \quad (88)$$

ここで,

$$\alpha_1 = \rho_1 \frac{\xi_0}{k_1^2 - a^2}, \quad \alpha_2 = \rho_2 \frac{\xi_0}{k_2^2 - a^2}, \quad \alpha_3 = \rho_3 \frac{\xi_0}{k_3^2 - a^2} \quad (89)$$

⁸

$$p = \frac{|ax + by + cz - 1|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}, \quad M = \sum m$$

⁹ これは,

$$u\xi + v\eta + w\zeta = 1$$

に対応する.

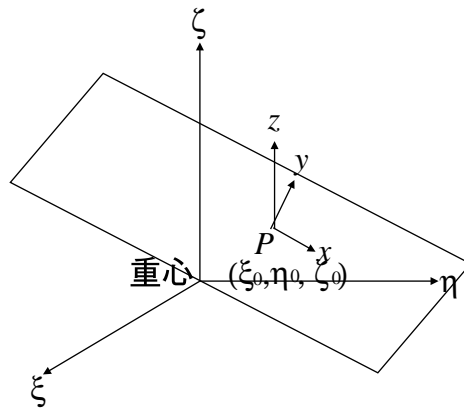


Figure 11: Binet の定理

$$\beta_1 = \rho_1 \frac{\eta_0}{k_1^2 - b^2}, \quad \beta_2 = \rho_2 \frac{\eta_0}{k_2^2 - b^2}, \quad \beta_3 = \rho_3 \frac{\eta_0}{k_3^2 - b^2} \quad (90)$$

$$\gamma_1 = \rho_1 \frac{\zeta_0}{k_1^2 - c^2}, \quad \gamma_2 = \rho_2 \frac{\zeta_0}{k_2^2 - c^2}, \quad \gamma_3 = \rho_3 \frac{\zeta_0}{k_3^2 - c^2} \quad (91)$$

$$\rho_i^2 = \left[\left(\frac{\xi_0}{k_1^2 - a^2} \right)^2 + \left(\frac{\eta_0}{k_2^2 - b^2} \right)^2 + \left(\frac{\zeta_0}{k_3^2 - c^2} \right)^2 + 1 \right]^{-1} \quad (92)$$

これを解くと,

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1 \xi + \beta_1 \eta + \gamma_1 \zeta - (\alpha_1 \xi_0 + \beta_1 \eta_0 + \gamma_1 \zeta_0) \\ &= \alpha_1 \xi + \beta_1 \eta + \gamma_1 \zeta - \rho_1 \end{aligned} \quad (93)$$

$$\left(k_j \text{は (83) を満たすから, } \alpha_1 \xi_0 + \beta_1 \eta_0 + \gamma_1 \zeta_0 = \rho_1 \left(\frac{\xi_0}{k_1^2 - a^2} + \frac{\eta_0}{k_2^2 - b^2} + \frac{\zeta_0}{k_3^2 - c^2} \right) = \rho_1 \right)$$

$$y = \alpha_2 \xi + \beta_2 \eta + \gamma_2 \zeta - \rho_2 \quad (94)$$

$$z = \alpha_3 \xi + \beta_3 \eta + \gamma_3 \zeta - \rho_3 \quad (95)$$

さて,

$$\sum m \xi = \sum m \eta = \sum m \zeta = \sum m \xi \eta = \sum m \eta \zeta = \sum m \zeta \xi = 0 \quad (96)$$

主慣性面に関する慣性能率は¹⁰,

$$\begin{aligned} \sum m x^2 &= \sum m (\alpha_1 \xi + \beta_1 \eta + \gamma_1 \zeta - \rho_1)^2 \\ &= M (\alpha_1^2 a^2 + \beta_1^2 b^2 + \gamma_1^2 c^2 + \rho_1^2) \\ &= M \rho_1^2 \left[\left(\frac{a \xi_0}{k_1^2 - a^2} \right)^2 + \left(\frac{b \eta_0}{k_1^2 - b^2} \right)^2 + \left(\frac{c \zeta_0}{k_1^2 - c^2} \right)^2 + 1 \right] \end{aligned} \quad (97)$$

¹⁰

$$\sum m \xi^2 = M a^2, \quad \sum m \eta^2 = M b^2, \quad \sum m \zeta^2 = M c^2$$

いっぽう,

$$1 = \frac{\xi_0^2}{k_1^2 - a^2} + \frac{\eta_0^2}{k_1^2 - b^2} + \frac{\zeta_0^2}{k_1^2 - c^2} \quad (98)$$

より,

$$\begin{aligned} \sum mx^2 &= M\rho_1^2 \left[\frac{k_1^2 \xi_0^2}{(k_1^2 - a^2)^2} + \frac{k_1^2 \eta_0^2}{(k_1^2 - b^2)^2} + \frac{k_1^2 \zeta_0^2}{(k_1^2 - c^2)^2} \right] \\ &= M\rho_1^2 k_1^2 \frac{1}{\rho_1^2} = Mk_1^2 \end{aligned} \quad (99)$$

同様に,

$$\sum my^2 = Mk_2^2 \quad (100)$$

$$\sum mz^2 = Mk_3^2 \quad (101)$$

$$\sum mxy = \sum myz = \sum mzx = 0 \quad (102)$$

さて, P における慣性楕円体は,

$$A = \sum m(y^2 + z^2) = M(k_2^2 + Mk_3^2) \quad (103)$$

等により,

$$M(k_2^2 + k_3^2)x^2 + M(k_3^2 + k_1^2)y^2 + M(k_1^2 + k_2^2)z^2 = M\ell^4 \quad (104)$$

よって,

$$(k_2^2 + k_3^2)x^2 + (k_3^2 + k_1^2)y^2 + (k_1^2 + k_2^2)z^2 = \ell^4 \quad (105)$$

ここで ℓ は代表的な長さである. $k_1 > k_2 > k_3$ より,

- 最長軸は楕円面に垂直
- 最短軸は二葉双極面に垂直

2.5 主点

The principal point of a given line

線 ℓ がその点 P の慣性主軸であるような ℓ 上の点

2.5.1 中心楕円体が球

- G を通れば ℓ 上のどこでも主点
- G を通らなければ ℓ 上に降ろした G からの足 P

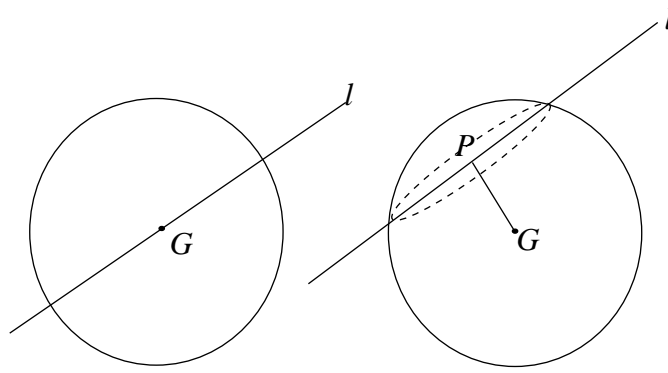


Figure 12: 中心楕円体が球

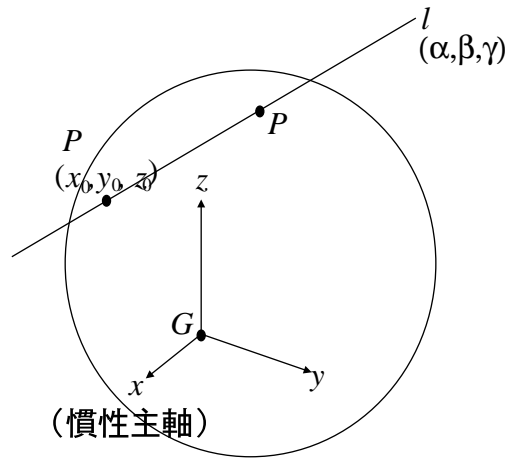


Figure 13: 中心楕円体が球でないとき

2.5.2 中心楕円体が球でないとき

l :

$$x = x_0 + \alpha s, \quad y = y_0 + \beta s, \quad z = z_0 + \gamma s \quad (106)$$

今、点 $P(x, y, z)$ が主点とする。

a, b, c … 主慣性面に対する回転半径

P が主点だから3つの直交曲面のうち、1つが l に直交している。直交曲面の方程式は(83)より、

$$\frac{x^2}{k^2 - a^2} + \frac{y^2}{k^2 - b^2} + \frac{z^2}{k^2 - c^2} = 1 \quad (107)$$

l がこれに直交するには

$$\alpha = \frac{1}{R} \frac{x_0 + \alpha s}{k^2 - a^2}, \quad \beta = \frac{1}{R} \frac{y_0 + \beta s}{k^2 - b^2}, \quad \gamma = \frac{1}{R} \frac{z_0 + \gamma s}{k^2 - c^2} \quad (108)$$

$$R^2 = \left(\frac{x_0 + \alpha s}{k^2 - a^2}\right)^2 + \left(\frac{y_0 + \beta s}{k^2 - b^2}\right)^2 + \left(\frac{z_0 + \gamma s}{k^2 - c^2}\right)^2 \quad \text{Normaling Factor} \quad (109)$$

でなければならない。

1. l が重心 G を通る時

$(x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$ と出来るから,

$$\alpha \left(1 - \frac{1}{R} \frac{s}{k^2 - a^2}\right) = 0, \quad \beta \left(1 - \frac{1}{R} \frac{s}{k^2 - b^2}\right) = 0, \quad \gamma \left(1 - \frac{1}{R} \frac{s}{k^2 - c^2}\right) = 0, \quad (110)$$

これが成り立つには l が,

$$(1, 0, 0), \quad (0, 1, 0), \quad (0, 0, 1) \quad (111)$$

でなければならない (主慣性軸 (座標軸)).

2. l が重心 G を通らない時

(108) より,

$$R = \frac{x_0 + \alpha s}{\alpha(k^2 - a^2)} = \frac{y_0 + \beta s}{\beta(k^2 - b^2)} = \frac{z_0 + \gamma s}{\gamma(k^2 - c^2)} \quad (112)$$

s, k を消去すると,

$$R = \frac{\frac{y_0}{\beta} - \frac{x_0}{\alpha}}{a^2 - b^2} = \frac{\frac{z_0}{\gamma} - \frac{y_0}{\beta}}{b^2 - c^2} = \frac{\frac{x_0}{\alpha} - \frac{y_0}{\beta}}{c^2 - a^2} \quad (113)$$

これより,

$$\frac{b^2 - c^2}{\alpha} x_0 + \frac{c^2 - a^2}{\beta} y_0 + \frac{a^2 - b^2}{\gamma} z_0 = 0 \quad (114)$$

もちろんこれは l を含む平面の式である。

3. k, s の値

$$R^2 \alpha^2 (k^2 - a^2) + R^2 \beta^2 (k^2 - b^2) + R^2 \gamma^2 (k^2 - c^2) = 1 \quad (115)$$

$$R^2 k^2 - R^2 (\alpha^2 a^2 + \beta^2 b^2 + \gamma^2 c^2) = 1 \quad (116)$$

よって,

$$k^2 = \frac{1}{R^2} + (a^2 \alpha^2 + b^2 \beta^2 + c^2 \gamma^2) \quad (117)$$

したがって,

$$s = R(k^2 - a^2) - \frac{x_0}{\alpha} = R(k^2 - b^2) - \frac{y_0}{\beta} = R(k^2 - c^2) - \frac{z_0}{\gamma} \quad (118)$$

$$\begin{aligned} s &= Rk^2 - (a^2 \alpha^2 + b^2 \beta^2 + c^2 \gamma^2) - (\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0) \\ &= \frac{1}{R} - (\alpha x_0 + \beta y_0 + \gamma z_0) \end{aligned} \quad (119)$$

2.6 回転の楕円体

Ellipsoid of Jorration

O 点における慣性楕円体を,

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = M\ell^4 \quad (120)$$

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = \frac{1}{M} \quad (121)$$

(120) について (121) を回転の楕円体という. (121) の各軸の長さは (120) の回転半径である. (120) と (121) は相反 (reciprocal) であるという.

3 オイラーの運動方程式

3.1 歴史

1749	d'Alembert	剛体の自由回転
1758	Euler	オイラーの運動方程式
	Jacobi	外力が固定点を通る1つの力で Euler の問題が置き換えられる時を解いた
1815	Lagrange Poisson	固定点の慣性楕円体が $A = B$ で軸が重心を通る時
1851	Poinsot	Euler 問題を幾何学的に解く
1889	Mme Kovaleski	$A = B = 2C$
19-	Andoyer	Andoyer con. var. の発見

3.2 剛体の変位

3.2.1 固定軸の回りの回転による変位

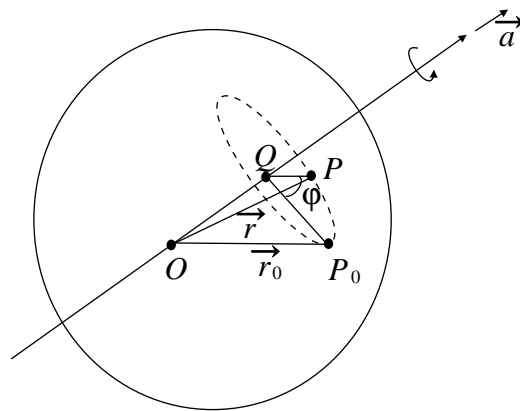


Figure 14: 固定軸の回りの回転

$$\vec{r} = q\vec{r}_0q^{-1} \quad (122)$$

$$q = \cos \frac{\varphi}{2} + \vec{a} \sin \frac{\varphi}{2} \quad (123)$$

$$q^{-1} = \cos \frac{\varphi}{2} - \vec{a} \sin \frac{\varphi}{2} \quad (124)$$

$$qq^{-1} = \cos^2 \frac{\varphi}{2} - \vec{a}^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \quad (125)$$

$$\vec{a}\vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \times \vec{b} = S\vec{a}\vec{b} + V\vec{a}\vec{b}$$

より,

$$\vec{a}\vec{a} = S\vec{a}\vec{a} = -|\vec{a}|^2 = -1 \quad (126)$$

よって,

$$qq^{-1} = 1 \quad (127)$$

$$\vec{r}_0 q^{-1} = \vec{r}_0 \cos \frac{\varphi}{2} - \vec{r}_0 \vec{a} \sin \frac{\varphi}{2} \quad (128)$$

$$\begin{aligned} q\vec{r}_0 q^{-1} &= \vec{r}_0 \cos^2 \frac{\varphi}{2} - \vec{a}\vec{r}_0\vec{a} \sin^2 \frac{\varphi}{2} + \underbrace{(\vec{a}\vec{r}_0 - \vec{r}_0\vec{a})}_{2V\vec{a}\vec{r}_0} \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \\ &= V\vec{a}\vec{r}_0 \sin \varphi + \vec{r}_0 \cos^2 \frac{\varphi}{2} - \vec{a}\vec{r}_0\vec{a} \sin^2 \frac{\varphi}{2} \end{aligned} \quad (129)$$

変位 $\Delta\vec{r}$ は,

$$\begin{aligned} \Delta\vec{r}_0 &= \vec{r} - \vec{r}_0 \\ &= V\vec{a}\vec{r}_0 \sin \varphi - (\vec{r}_0 + \vec{a}\vec{r}_0\vec{a}) \sin^2 \frac{\varphi}{2} \end{aligned} \quad (130)$$

無限小回転では,

$$d\vec{r}_0 = d\varphi V\vec{a} \cdot \vec{r}_0 + \mathcal{O}(d\varphi^2) \quad (131)$$

$$\vec{r} = \left. \frac{d\vec{r}}{dt} \right|_{\vec{r}=\vec{r}_0} = \dot{\varphi} V\vec{a} \cdot \vec{r}_0 = V(\vec{a}\dot{\varphi}) \cdot \vec{r}_0 = V\vec{\omega}\vec{r}_0 \quad (132)$$

$\vec{\omega}$: 角速度ベクトル

よって,

$$\vec{r}_0 = V\vec{\omega} \cdot \vec{r}_0 \quad (133)$$

となる¹¹

3.2.2 剛体の変位 (一般的)

平行移動する基準点 O に回転ベクトル \vec{a} , 回転角 φ は存在しない事を示そう. '

¹¹ これは良く知られた結果,

$$\vec{F} \propto \vec{\omega} \times \vec{r}$$

に導く.

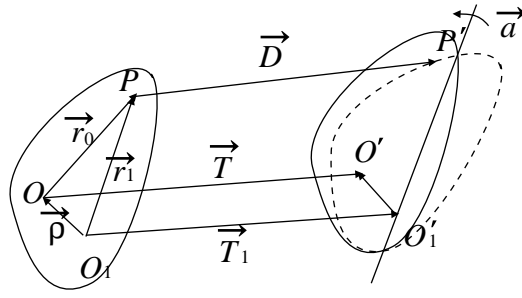


Figure 15: 剛体の変位 (一般的)

$$\vec{D} = \vec{T} + q\vec{r}_0q^{-1} - \vec{r}_0, \quad q = \cos \frac{\varphi}{2} + \vec{a} \sin \frac{\varphi}{2} \quad (134)$$

別の点 O_1 について行くと,

$$\vec{D}_1 = \vec{T}_1 + a\vec{r}_1q^{-1} - \vec{r}_1 \quad (135)$$

とおくと,

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_0 + \vec{\rho} \quad (136)$$

$$\vec{T}_1 = \vec{T}_0 + q(-\vec{\rho})q^{-1} + \vec{\rho} \quad (137)$$

よって,

$$\vec{D}_1 = \vec{T} + q\vec{r}_0q^{-1} - \vec{r}_0 = \vec{D} \quad (138)$$

さらに, 次の定理が分かっている.

剛体の任意の変位は適当な screw $(\vec{T} \parallel \vec{a})$ で表される.

いま,

$$\vec{D} = \vec{T} + q\vec{r}q^{-1} - \vec{r}, \quad q = \cos \frac{\varphi}{2} + \vec{a} \sin \frac{\varphi}{2} \quad (139)$$

O を ρ だけずらすと,

$$\vec{T}_1 = \vec{T} + q\vec{\rho}q^{-1} - \vec{\rho} \quad (140)$$

$V\vec{a}\vec{T}_1 = 0$ にするには,

$$V\vec{a}\vec{\rho} = V\vec{a}q\vec{\rho}q^{-1} = V\vec{a}\vec{T} \quad (141)$$

であればよい. q は \vec{a} で generate されているから,

$$q\vec{a} = \vec{a}q \quad (142)$$

$$Vqpq^{-1} = Vq(Sp + Vp)q^{-1} = Vq(Sp)q^{-1} + \underbrace{Vq(Vp)q^{-1}}_{=0} = V(Sp) + Vq(Vp)q^{-1} \quad (143)$$

さて¹²,

$$q\vec{\rho}_1 = (Sq + Vq)\vec{\rho}_1 = \vec{\rho}_1 Sq + (Vq)\vec{\rho}_1 = \vec{\rho}_1(Sq - Vq) = \vec{\rho}_1 q^{-1} \quad (144)$$

よって,

$$(1 - q^2)\vec{\rho}_1 = \vec{T}_1, \quad \vec{\rho}_1 = (1 - q^2)^{-1}\vec{T}_1 \quad (145)$$

別に,

$$1 - q^2 = 1 - (\cos \varphi + \vec{a} \sin \varphi) = 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} - \vec{a} \sin \varphi = 2 \underbrace{\vec{a} \sin \frac{\varphi}{2}}_{V_q} \underbrace{\left(-\vec{a} \sin \frac{\varphi}{2} + \cos \frac{\varphi}{2} \right)}_{=q^{-1}} = 2(Vq)q^{-1} \quad (146)$$

よって,

$$(1 - q^2)^{-1} = (2(Vq)q^{-1})^{-1} = q \frac{1}{2} (Vq)^{-1} = \frac{1}{2} (Vq)^{-1} q \quad (qf(q) = f(q)q) \quad (147)$$

$$\vec{\rho}_1 q - q\vec{\rho}_1 = \vec{T}_1 q \quad (148)$$

さて,

$$[p, q] = 2VVpVq \equiv [Vp, Vq] \quad (149)$$

$$\begin{aligned} pq - qp &= (Sp + Vp)(Sq + Vq) - (Sq + Vq)(Sp + Vp) \\ &= SpSq + VpSq + SpVq + VpVq - SqSp - VqSp - SqVp - VqVp \\ &= VpVq - VqVp \\ &= (SVpVq + VVpVq) - (SVqVp + VVqVp) \\ &= 2VVpVq \end{aligned} \quad (150)$$

ここで,

$$SpSq = SqSp, \quad VpSq = SqVp, \quad Sab = Sba, \quad Vab = -Vba \quad (151)$$

を用いた.

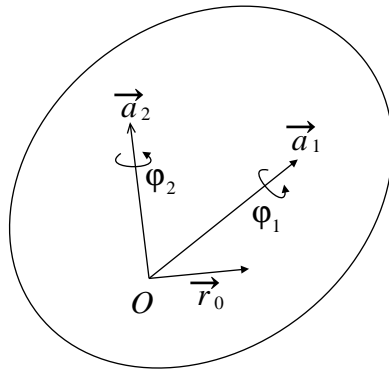


Figure 16: 固定点の回りの回転

3.3 固定点の回りの運動

3.3.1 角速度

\vec{a}_1 の回りに φ_1 回転した後, \vec{a}_2 の回りに φ_2 回転しよう.

$$\vec{r}_1 = q_1 \vec{r}_0 q_1^{-1}, \quad \vec{r}_2 = q_2 \vec{r}_1 q_1^{-1}, \quad q_j = \cos \frac{\varphi_j}{2} + \vec{a}_j \sin \frac{\varphi_j}{2} \quad (152)$$

よって,

$$\vec{r}_2 = q_2 q_1 \vec{r}_0 q_1^{-1} q_2^{-1} \quad (153)$$

$q_2 q_1 = q$ とおくと, $q_1^{-1} q_2^{-1} = (q_2 q_1)^{-1} = q^{-1}$ よって,

$$\vec{r}_2 = q \vec{r}_0 q^{-1} \quad (154)$$

$$\begin{aligned} q &= \left(\cos \frac{\varphi_2}{2} + \vec{a}_2 \sin \frac{\varphi_2}{2} \right) \left(\cos \frac{\varphi_1}{2} + \vec{a}_1 \sin \frac{\varphi_1}{2} \right) \\ &= \cos \frac{\varphi_2}{2} \cos \frac{\varphi_1}{2} + \vec{a}_2 \sin \frac{\varphi_2}{2} \cos \frac{\varphi_1}{2} + \vec{a}_1 \sin \frac{\varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi_2}{2} + \sin \frac{\varphi_2}{2} \sin \frac{\varphi_1}{2} \vec{a}_2 \vec{a}_1 \\ &= \left[\cos \frac{\varphi_2}{2} \cos \frac{\varphi_1}{2} + (\vec{S} \vec{a}_2 \vec{a}_1) \sin \frac{\varphi_2}{2} \sin \frac{\varphi_1}{2} \right] + \sin \frac{\varphi_2}{2} \cos \frac{\varphi_1}{2} \vec{a}_2 + \sin \frac{\varphi_1}{2} \cos \frac{\varphi_2}{2} \vec{a}_1 \\ &\quad + \sin \frac{\varphi_2}{2} \sin \frac{\varphi_1}{2} \vec{V} \vec{a}_2 \vec{a}_1 \end{aligned} \quad (155)$$

さて, $q_1 q_2 = q'$ とおくと, $q_1 q_2 \neq q_2 q_1$ (等号は $\vec{a}_2 = \vec{a}_1$ の時だけ). つまり,

有限回転は順序に依存する.

無限小回転

$$\vec{r}_1 = q_1 \vec{r}_0 q_1^{-1} \quad \left(q_1 = 1 + \frac{\varphi_1}{2} \vec{a}_1 + \mathcal{O}(\varphi_1^2) \right)$$

¹² $\vec{\rho}_1 \perp \vec{V}q(\|\vec{a}\|)$ より $(\vec{V}q)\rho_1 = -\rho_1(\vec{V}q)$

$$\begin{aligned}
&= \left(1 + \frac{\varphi_1}{2}\vec{a}_1\right)\vec{r}_0\left(1 - \frac{\varphi_1}{2}\vec{a}_1\right) \\
&= \vec{r}_0 + \frac{\varphi_1}{2}(\vec{a}_1\vec{r}_0 - \vec{r}_0\vec{a}_1) + \mathcal{O}(\varphi_1^2) \quad (pq - qp = 2VVpVq) \\
&\quad \vec{r}_0 + \varphi_1 V\vec{a}_1\vec{r}_0 + \mathcal{O}(\varphi_1^2)
\end{aligned} \tag{156}$$

よって,

$$\begin{aligned}
\vec{r}_2 &= \vec{r}_1 + V\vec{a}_2\vec{r}_1 + \mathcal{O}(\varphi_2^2) \\
&= \vec{r}_0 + \varphi_1 V\vec{a}_1\vec{r}_0 + \varphi_2 V\vec{a}_2\vec{r}_0 + \mathcal{O}(\text{二次})
\end{aligned} \tag{157}$$

無限小回転は順序によらない.

無限小回転において,

$$d\varphi_j\vec{a}_j = \vec{\omega}_j dt, \quad d(\vec{r}_2 - \vec{r}_0) = \vec{r}_0 dt \tag{158}$$

とおくと,

$$\vec{r}_0 = V\vec{\omega}_1\vec{r}_0 + V\vec{\omega}_2\vec{r}_0 = V\vec{\omega}\vec{r}_0, \quad \vec{\omega} = \vec{\omega}_1 + \vec{\omega}_2 \tag{159}$$

このように, 角速度 $\vec{\omega}$ はベクトルであり, 合成できる (無限小回転).

3.3.2 角運動量と運動エネルギー

$$\vec{G} = \sum m V\vec{r}\vec{r} = \sum m V\vec{r}V\vec{\omega}\vec{r} \quad ; \quad \text{角運動量} \tag{160}$$

ここで,

$$V\alpha(V\beta\gamma) = V\alpha(\beta\gamma - S\beta\gamma) = V\alpha\beta\gamma = \alpha S\beta\gamma - \beta S\gamma\alpha, \quad S\gamma\alpha = -\gamma \cdot \alpha \tag{161}$$

より,

$$\vec{G} = \sum m [\vec{r}S\vec{\omega}\vec{r} + \vec{\omega}r^2] \tag{162}$$

O を原点とする剛体に固定された軸 i, j, k をとる.

$$\vec{\omega} = \omega_1 i + \omega_2 j + \omega_3 k \tag{163}$$

$$\vec{r} = \xi i + \eta j + \zeta k \tag{164}$$

すると,

$$S\vec{\omega}\vec{r} = -\omega_1 \xi - \omega_2 \eta - \omega_3 \zeta \tag{165}$$

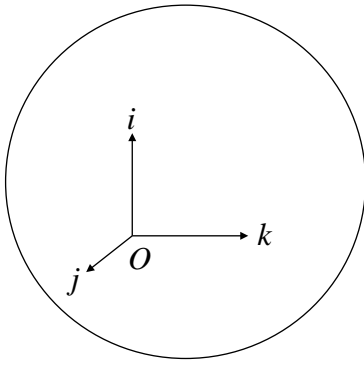


Figure 17: i, j, k

よって,

$$\begin{aligned}\vec{G} &= \left[\sum mr^2\omega_2 - \sum m\xi(\omega_1\xi + \omega_2\eta + \omega_3\zeta) \right] i \\ &+ \left[\sum mr^2\omega_2 - \sum m\eta(\omega_1\xi + \omega_2\eta + \omega_3\zeta) \right] j \\ &+ \left[\sum mr^2\omega_3 - \sum m\zeta(\omega_1\xi + \omega_2\eta + \omega_3\zeta) \right] k\end{aligned}\quad (166)$$

$r^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$ より,

$$G_j = \sum m(\delta_{kl} - \delta_{jl})r_k r_l \quad (167)$$

慣性積をつかって,

$$\begin{aligned}\vec{G} &= (A\omega_1 - F\omega_2 - E\omega_3)i \\ &+ (B\omega_2 - D\omega_3 - F\omega_1)j \\ &+ (C\omega_3 - E\omega_1 - D\omega_2)k\end{aligned}\quad (168)$$

同じ様に運動エネルギーについて¹³,

$$\begin{aligned}T &= -\frac{1}{2} \sum mS\vec{r}\vec{r} = -\frac{1}{2} \sum mS\vec{r}V\vec{\omega}\vec{r} = -\frac{1}{2} \sum mS\vec{\omega}\vec{r}\vec{r} \\ &= -\frac{1}{2}S(\vec{\omega} \sum m\vec{r}\vec{r}) = -\frac{1}{2}S(\vec{\omega} \sum mV\vec{r}\vec{r}) = -\frac{1}{2}S\vec{\omega}\vec{G}\end{aligned}\quad (169)$$

$$= \frac{1}{2}(A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2) - (D\omega_2\omega_3 + E\omega_3\omega_1 + F\omega_1\omega_2) \quad (170)$$

一方 $\vec{r} = V\vec{\omega}\vec{r}$ を同時に代入して,

$$2T = - \sum mSV\vec{\omega}\vec{r}V\vec{\omega}\vec{r} \quad (171)$$

$$\begin{aligned}SV\vec{\omega}\vec{r}V\vec{\omega}\vec{r} &= S\vec{\omega}\vec{r}V\vec{\omega}\vec{r} = -S\vec{\omega}\vec{r}V\vec{r}\vec{\omega} \\ &= -S\vec{\omega}\vec{r}(\vec{r}\vec{\omega} - S\vec{r}\vec{\omega}) = -\vec{r}^2\vec{\omega}^2 + (S\vec{\omega}\vec{r})^2\end{aligned}\quad (172)$$

¹³ $S\vec{a}\vec{b} = -\vec{a} \cdot \vec{b}$

よって,

$$2T = \sum m[\omega^2 r^2 - (S\vec{\omega}\vec{r})^2] = \sum m\omega^2[r^2 - (S\vec{r}U\vec{\omega})^2] = \omega^2 \sum m\omega^2 p^2 = \omega^2 I_\omega \quad (173)$$

ここで I_ω は $\vec{\omega}$ 方向の慣性モーメント.

$$I_\omega = A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2 - 2(D\omega_2\omega_3 + E\omega_3\omega_2 + F\omega_1\omega_2) \quad (174)$$

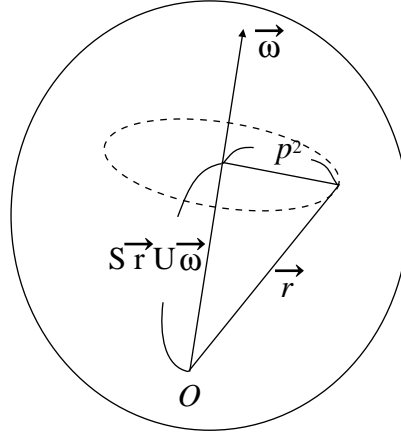


Figure 18: $S\vec{r}U\vec{\omega}, p^2, \vec{r}$

3.3.3 i, j, k を慣性主軸にとる

$$\vec{G} = A\omega_1 i + B\omega_2 j + C\omega_3 \quad (175)$$

i, j, k も剛体と共に動くから¹⁴,

$$\vec{G} = \underbrace{A\dot{\omega}_1 i + B\dot{\omega}_2 j + C\dot{\omega}_3 k}_{\frac{\partial G}{\partial t}} + \underbrace{A\omega_1 V\vec{\omega}i + B\omega_2 V\vec{\omega}j + C\omega_3 V\vec{\omega}k}_{V\vec{\omega}\vec{G}} \quad (176)$$

よって,

$$\vec{G} = \frac{\partial G}{\partial t} + V\vec{\omega}\vec{G} \quad (177)$$

$V\vec{\omega}\vec{G}$; 遠心偶力 (centrifugal couple)

$V\vec{\omega}i = -\omega_2 k + \omega_3 j$ などにより,

$$\begin{aligned} \vec{G} = & [A\dot{\omega}_1 + (C - B)\omega_2\omega_3] i + [B\dot{\omega}_2 + (A - C)\omega_3\omega_1] j \\ & + [C\dot{\omega}_3 + (B - A)\omega_1\omega_2] k \end{aligned} \quad (178)$$

¹⁴ $\vec{r} = V\vec{\omega}\vec{r}$

遠心力 (Centrifugal Couple) について

遠心力：

$$\vec{f} = mp^2\omega^2 U\vec{f}, \quad U\vec{f} = V\vec{a}V\vec{a}^{-1}\vec{r} = -V\vec{a}V\vec{a}\vec{r} \quad (179)$$

よって¹⁵，

$$\vec{f} = -m\omega^2 V\vec{a}V\vec{a}\vec{r} = mV\vec{\omega}V\vec{\omega}\vec{r} = m\vec{\omega}S\vec{\omega}\vec{r} + m\omega^2\vec{r} \quad (180)$$

$$V\vec{r}\vec{f} = mS\vec{r}\vec{\omega}V\vec{\omega}\vec{r} \quad (181)$$

一方，

$$\vec{G} = \sum mV\vec{r}V\vec{\omega}\vec{R} = \sum (m\vec{\omega}r^2 + m\vec{r}S\vec{\omega}\vec{r}) \quad (182)$$

$$V\vec{\omega}\vec{G} = \sum mV\vec{\omega}\vec{r}S\vec{\omega}\vec{r} = -\sum V\vec{r}\vec{f} \quad (183)$$

よって $V\vec{\omega}\vec{G}$ は遠心力に依存する term である．これは回転軸の移動による結果である． Euler の運動方程式

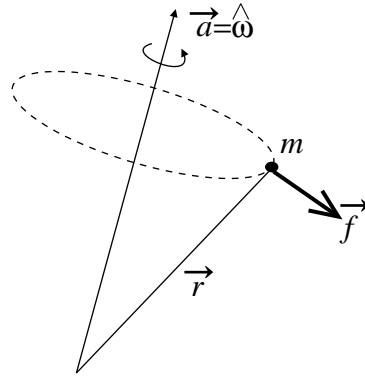


Figure 19: 遠心力

$\vec{G} = \vec{N}$ の表式

$$\begin{cases} A\dot{\omega}_1 + (C - B)\omega_2\omega_3 = N_1 \\ B\dot{\omega}_2 + (A - C)\omega_3\omega_1 = N_2 \\ C\dot{\omega}_3 + (B - A)\omega_1\omega_2 = N_3 \end{cases} \quad (184)$$

これは一般には解けない．天体力学では重心を O にとって $\vec{N} = \text{grad}\Phi$ ， $A \sim B \sim C$ 等の条件などによりいろいろと解ける．

これは3階の方程式である．実は6階の方程式でないと運動は解けない．後の3階は $\dot{\psi}, \dot{\varphi}, \dot{\nu}\theta$ と $\vec{\omega}$ の関係である．さて，

¹⁵ $\vec{\omega} = \omega\hat{\omega} = \omega\vec{a}$

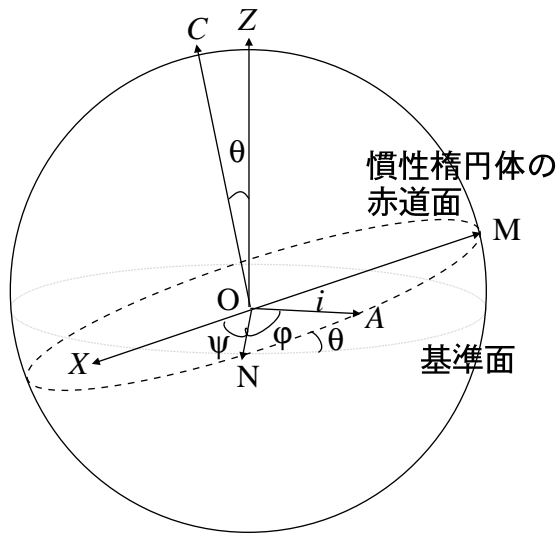


Figure 20: 慣性楕円体の赤道面と基準面

$$\vec{\omega} = \omega_1 i + \omega_2 j + \omega_3 k \quad (185)$$

一方,

$$\vec{\omega} = \dot{\psi} OZ + \dot{\theta} ON + \dot{\varphi} OC \quad (186)$$

ここで,

$$i = (OC)^{\frac{2}{\pi}} \varphi ON = (\cos \varphi + OC \sin \varphi) ON = \cos \varphi \cdot ON + \sin \varphi \cdot OM \quad (187)$$

$$j = ki = OC \cdot i = \cos \varphi \cdot OM - \sin \varphi \cdot ON \quad (188)$$

$$k = OC \quad (189)$$

$$OZ = (ON)^{\frac{2}{\pi}(-\varphi)} OC = \cos \theta \cdot OC + \sin \theta OM \quad (190)$$

代入すると,

$$\begin{aligned} \vec{\omega} &= \omega_1 (\cos \varphi \cdot ON + \sin \varphi \cdot OM) + \omega_2 (\cos \varphi \cdot OM - \sin \varphi \cdot ON) + \omega_3 OC \\ &= \dot{\psi} (\cos \theta \cdot OC + \sin \theta OM) + \dot{\theta} \cdot ON + \dot{\varphi} \cdot OC \end{aligned} \quad (191)$$

比較して,

$$\left. \begin{aligned} ON; \quad \dot{\theta} &= \omega_1 \cos \varphi - \omega_2 \sin \varphi \\ OM; \quad \sin \theta \dot{\psi} &= \omega_1 \sin \varphi + \omega_2 \cos \varphi \\ OC; \quad \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \theta &= \omega_3 \\ \dot{\psi} &= -(\omega_1 \sin \varphi + \omega_2 \cos \varphi) \csc \theta + \omega_3 \end{aligned} \right\} \quad (192)$$

一般には (184) を解いて $\vec{\omega}$ を求め, (192) を用いて (ψ, θ, φ) を求めるわけであるが, これは結構複雑になる.

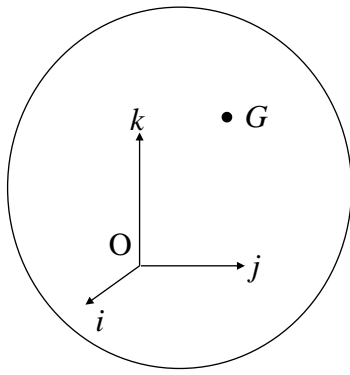


Figure 21: 剛体に固定した座標系

3.3.4 $\vec{N} = MV\vec{r}_G\vec{g}$ の場合

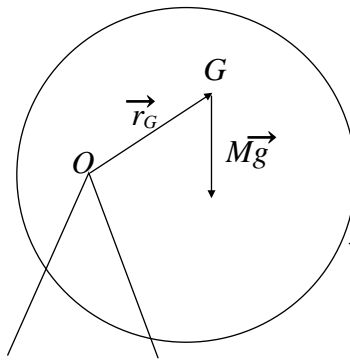


Figure 22: $\vec{N} = MV\vec{r}_G\vec{g}$

O で支持された一様重力下のコマ.

$$\vec{G} = MV\vec{r}_G\vec{g} \quad (193)$$

まず¹⁶,

$$S\vec{\omega}\vec{G} = MS\vec{\omega}V\vec{r}_G\vec{g} = MS\vec{\omega}\vec{r}_G\vec{g} = MS((V\vec{\omega}\vec{r}_G)\vec{g}) = MS(\vec{r}_G\vec{g}) = \frac{d}{dt}(MS\vec{r}_G\vec{g}) \quad (194)$$

一方,

$$\begin{aligned} S\vec{\omega}\vec{G} &= -[A\omega_1\dot{\omega}_1 + B\omega_2\dot{\omega}_2 + C\omega_3\dot{\omega}_3] \\ &= -\frac{d}{dt}\frac{1}{2}(A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2) = -\dot{T} \end{aligned} \quad (195)$$

¹⁶ $\vec{r} = V\vec{\omega}\vec{r}, \frac{d\vec{g}}{dt} = 0$

[注意]

$$T = -\frac{1}{2}S\vec{\omega}\vec{G}, \quad \dot{T} = -\frac{1}{2}\left(S\dot{\vec{\omega}}\vec{G} + \vec{\omega}\dot{\vec{G}}\right) = -S\dot{\vec{\omega}}\vec{G} \quad (196)$$

したがって,

$$S\dot{\vec{\omega}}\vec{G} = S\dot{\vec{\omega}}\vec{G} \quad (197)$$

よって,

$$\underbrace{\frac{1}{2}\left(A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2\right)}_{\text{運動エネルギー}} + M \underbrace{S\vec{r}_G\vec{g}}_{hg:\text{位置エネルギー}} = \text{const.} \quad (198)$$

これはエネルギー積分. さて, (193) で鉛直上向きを k_0 とすると,

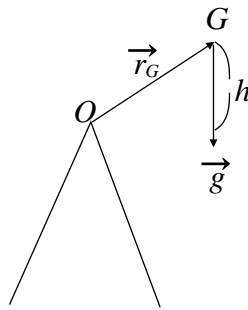


Figure 23: 位置エネルギー

$$S\vec{G}k_0 = MS(V\vec{r}_G\vec{g})k_0 = MS\vec{r}_GV(\vec{g}k_0) = 0 \quad (\vec{g}\parallel k_0) \quad (199)$$

よって,

$$S\vec{G}k_0 = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad \text{角運動量の } z \text{ 成分} \quad (200)$$

慣性主軸に対する k_0 の方向余弦を $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ とすれば,

$$A\omega_1\gamma_1 + B\omega_2\gamma_2 + C\omega_3\gamma_3 = \text{const.} \quad (201)$$

知られている積分はこの2つだけである. さまざまな場合

Euler の場合 O が G と一致

Lagrange の場合 中心楕円体が軸対称, O が対称軸上にある. $A = B \neq C$

Kovalevski の場合 中心楕円体が軸対称, O は赤道面内, $A = B = 2C$

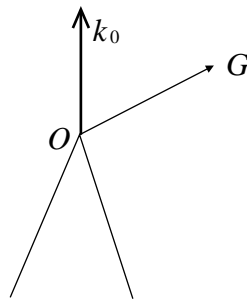


Figure 24: k_0

3.3.5 支持点 O に働く束縛力

O を支えるのに必要な力は？

$$M\vec{r}_G = M\vec{G} + \vec{R}, \quad \vec{R}: \text{O に働く束縛力} \quad (202)$$

この束縛力は剛体のどの点に対しても同じ力が働く。さて¹⁷,

$$\vec{r}_G = V\vec{\omega}\vec{r}_G, \quad \dot{\vec{r}}_G = V\dot{\vec{\omega}}\vec{r}_G + V\vec{\omega}(V\vec{\omega}\vec{r}_G) \quad (203)$$

$$\vec{\omega} = \dot{\omega}_1 i + \dot{\omega}_2 j + \dot{\omega}_3 k + \underbrace{\omega_1 V\vec{\omega}i + \omega_2 V\vec{\omega}j + \omega_3 V\vec{\omega}k}_{=0}, \quad \dot{i} = V\vec{\omega}\vec{i} \quad (204)$$

$V\vec{\omega}i = \omega_2 k - \omega_3 j$ などにより, 結局,

$$\vec{\omega} = \sum_{i,j,k} \left(\frac{B-C}{A} \omega_2 \omega_3 + \frac{N_1}{A} \right) i \quad (205)$$

一方,

$$\vec{r}_G \bar{\xi} i + \bar{\eta} j + \bar{\zeta} k \quad (206)$$

と書くと,

$$V\vec{\omega}\vec{r}_G = \sum_{i,j,k} \left[\left(\frac{C-A}{B} \omega_3 \omega_1 + \frac{N_2}{B} \right) \bar{\zeta} - \left(\frac{A-B}{C} \omega_1 \omega_2 + \frac{N_3}{C} \right) \bar{\eta} \right] i \quad (207)$$

さて,

$$\begin{aligned} V\vec{\omega}V\vec{\omega}\vec{r}_G &= \omega^2 \vec{r}_G \vec{\omega} S \vec{\omega} \vec{r}_G \\ &= \sum \left[\omega_1 (\omega_2 \bar{\xi} + \omega_2 \bar{\eta} + \omega_3 \bar{\zeta}) - \bar{\xi} (\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2) \right] i \\ &= \sum \left[\omega_1 (\omega_2 \bar{\eta} + \omega_3 \bar{\zeta}) - \bar{\xi} (\omega_2^2 + \omega_3^2) \right] i \end{aligned} \quad (208)$$

¹⁷ \vec{r}_G は剛体に固定されていないから, $\dot{\vec{a}} = V\vec{\omega}\vec{a}$ とはいかない.

結局,

$$\begin{aligned} \vec{R} = & -M\vec{g} + M \sum \left[\left(\frac{C-A}{B} \omega_3 \bar{\zeta} - \frac{A-B}{C} \omega_2 \bar{\eta} \right) \omega_1 \right. \\ & \left. + \omega_1 (\omega_2 \bar{\eta} + \omega_3 \bar{\zeta}) - \bar{\xi} (\omega_2^2 + \omega_3^2) \right] i + M \sum \left(\frac{N_2}{B} \bar{\zeta} - \frac{N_3}{C} \bar{\eta} i \right) \end{aligned} \quad (209)$$

$$N_1 = -MS(\mathbf{V}\vec{r}_G\vec{g})i = Mg(\gamma_2 \bar{\zeta} - \gamma_3 \bar{\eta}) \quad (210)$$

$$N_2 = -MS(\mathbf{V}\vec{r}_G\vec{g})j = Mg(\gamma_3 \bar{\xi} - \gamma_1 \bar{\zeta}) \quad (211)$$

$$N_3 = -MS(\mathbf{V}\vec{r}_G\vec{g})k = Mg(\gamma_1 \bar{\eta} - \gamma_2 \bar{\xi}) \quad (212)$$

重心以外の点が支持点になるとよけいな力がある.

$\vec{N} = 0$ の場合

$$\begin{cases} \vec{G} = 0 & \Rightarrow \vec{G} = \text{const.} \\ \dot{T} = S\vec{\omega}\vec{G} = 0 & \Rightarrow T = \text{const.} \end{cases} \quad (213)$$

そこで,

$$A\omega_1 i + B\omega_2 j + C\omega_3 k = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad \left. \begin{aligned} A^2\omega^2 + B^2\omega_2^2 + C^2\omega_3^2 &= G^2 \\ A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2 &= 2h \end{aligned} \right\} \quad (214)$$

ω_2 で表そう.

$$G^2 - 2Ah = B(B-A)\omega_2^2 + C(C-A)\omega_3^2 \quad (215)$$

よって,

$$\omega_3 = \pm \sqrt{\frac{1}{C(C-A)} [G^2 - 2Ah - B(B-A)\omega_2^2]} \quad (216)$$

$$\omega_1 = \pm \sqrt{\frac{1}{A(A-C)} [G^2 - 2Ch - B(B-C)\omega_2^2]} \quad (217)$$

$\vec{N} = 0$ より,

$$B\dot{\omega}_2 + (A-C)\omega_1\omega_3 = 0 \quad (218)$$

代入すると,

$$\dot{\omega}_2 = \pm \sqrt{-\frac{1}{AC} \left[\frac{G^2 - 2Ah}{B} - (B-A)\omega_2^2 \right] \left[\frac{G^2 - 2Ch}{B} - (B-C)\omega_2^2 \right]} \quad (219)$$

$$dt = \pm \int \frac{d\omega_2}{\sqrt{-\frac{1}{AC} \left[\frac{G^2 - 2Ah}{B} - (B-A)\omega_2^2 \right] \left[\frac{G^2 - 2Ch}{B} - (B-C)\omega_2^2 \right]}} \quad (220)$$

右辺は楕円関数である¹⁸． $A \leq B \leq C$ と仮定しよう．すると，

$$G^2 - 2Ah > 0 > G^2 - 2Ch, \quad B - A > 0 > B - C \quad (221)$$

よって，

$$\begin{aligned} & \int \frac{d\omega_2}{\sqrt{-\frac{1}{AC} \left[\frac{G^2-2Ah}{B} - (B-A)\omega_2^2 \right] \left[\frac{G^2-2Ch}{B} - (B-C)\omega_2^2 \right]}} \\ &= \sqrt{\frac{-ACB^2}{(G^2-2Ah)(G^2-2Ch)}} \int \frac{d\omega_2}{\sqrt{(1-k_A^2\omega_2^2)(1-k_C^2\omega_2^2)}} \\ & k_A^2 = \frac{B(B-A)}{G^2-2Ah} > 0, \quad k_C^2 = \frac{B(B-C)}{G^2-2Ch} > 0 \end{aligned} \quad (222)$$

$$|\omega_2| \leq \max\left(\frac{1}{k_A}, \frac{1}{k_C}\right) \quad (223)$$

$k_A\omega_2 = u$ とすると，

$$\int \frac{d\omega_2}{(1-u^2)(1-k^2u^2)} \propto \int dt \quad (224)$$

これより $u = \text{sn}(t, k)$, $k = \frac{k_C}{k_A}$.

D と ω_G

$$\begin{cases} 2h = 2T = -rs\vec{\omega} \vec{G} \equiv \omega_G \vec{G}, & \omega_G : \vec{\omega} \text{ の } \vec{G} \text{ 方向の成分} \\ G \equiv \omega_G D, & D : \omega_G \text{ 方向の慣性能率} \end{cases} \quad (225)$$

$$2h = D\omega_G^2 \quad (226)$$

$$G = D\omega_G \quad (227)$$

この ω_G と D を使うと，

$$A\omega_1^2 + C\omega_3^2 = D\omega_G^2 - B\omega_2^2, \quad A^2\omega_1^2 + C^2\omega_3^2 = D^2\omega_G^2 - B^2\omega_2^2 \quad (228)$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & C \\ A^2 & C^2 \end{vmatrix} = AC(C-A) \quad (229)$$

これより，

$$\omega_1^2 = \frac{1}{AC(C-A)} \begin{vmatrix} D\omega_G^2 - B\omega_2^2 & C \\ D^2\omega_G^2 - B^2\omega_3^2 & C^2 \end{vmatrix}$$

¹⁸ $A = B$ なら右辺は三角関数.

$$= \frac{B(C-A)}{A(C-A)} \left[\underbrace{\frac{D(C-D)}{B(C-B)} \omega_G^2 - \omega_2^2}_{f^2} \right] \quad (230)$$

$$\omega_3^2 = \frac{B(A-B)}{C(A-C)} \left[\underbrace{\frac{D(A-D)}{B(A-B)} \omega_G^2 - \omega_2^2}_{g^2} \right] \quad (231)$$

よって,

$$f^2 - g^2 = \frac{D(C-A)(B-D)}{B(C-B)(A-B)} \omega_G^2 \begin{cases} > 0, & A < D < B \\ < 0, & B < D < C \end{cases} \quad (232)$$

1. $A < D < B < C$ ¹⁹

$f^2 > g^2 \geq \omega_2^2$ より,

$$\omega_1^2 \geq \frac{D(B-D)}{A(B-A)} \omega_G^2, \quad -g \leq \omega_2 \leq g \quad (233)$$

2. $A < B < D < C$

$g^2 > f^2 \geq \omega_2^2$

$$-f \leq \omega_2 \leq f, \quad \omega_1^2 \geq \frac{D(B-D)}{C(B-C)} \quad (234)$$

いずれの場合も,

$$\dot{\omega}_2 = \pm \sqrt{\frac{(C-B)(B-A)}{AC}} \sqrt{(f^2 - \omega_2^2)(g^2 - \omega_2^2)} \quad (235)$$

$$\int_0^{\omega_2} \frac{d\omega_2}{\sqrt{(f^2 - \omega_2^2)(g^2 - \omega_2^2)}} = \sqrt{\frac{(C-B)(B-A)}{AC}} (t - t_0) \quad (236)$$

さて、普通は D は C に近いので 2. の場合を代表して考えよう。楕円関数、楕円積分のテキスト Byrd & Friedman “Handbook of Elliptic Integrals” の 219:00

$$\text{積分の左辺} = \frac{1}{g} u \quad (237)$$

$$\text{sn}^2 u = \frac{\omega_2^2}{f^2}, \quad k^2 = \frac{f^2}{g^2} = \frac{(B-A)(C-D)}{(D-A)(C-B)}, \quad k; \text{ modulus} \quad (238)$$

$k = 0 \Rightarrow \sin u$ これは $A = B$ or $C = D$ のときに起こる。

$$u = \sqrt{\frac{D(C-B)(D-A)}{ABC}} \omega_G (t - t_0) \quad (239)$$

¹⁹ $A < B < C$ より, A は I_{min} , C は I_{max} for $\forall I$ 慣性能率

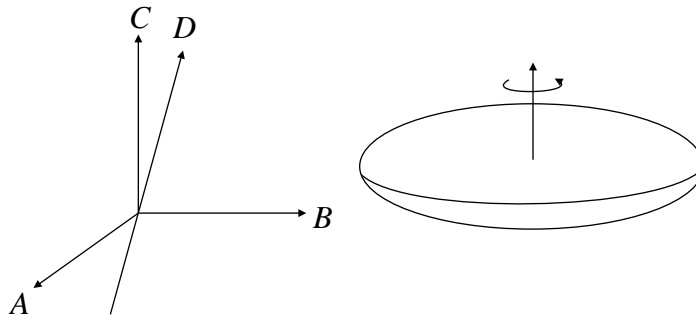


Figure 25: $A < B < D < C$

このとき,

$$\omega_2 = f \sin u = \sqrt{\frac{D(C-D)}{B(C-B)}} \omega_G \sin u \quad (240)$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{B(C-A)}{A(C-A)}} \sqrt{f^2 - \omega_2^2} = f \sqrt{\frac{B(C-A)}{A(C-A)}} \sqrt{1 - \sin^2 u} = \sqrt{\frac{D(C-D)}{A(C-A)}} \omega_G \operatorname{cn} u \quad (241)$$

Euler より²⁰, $\omega_3 \omega_1$ と $\dot{\omega}_2$ が同符号だから $\omega_3 > 0$ のときを考えて, 正の符号をとる.

$$\frac{d}{dt} \operatorname{sn} u = \operatorname{cnu} \cdot \underbrace{\frac{d \operatorname{nu}}{du}}_{\sim 1} \cdot \underbrace{\frac{du}{dt}}_{> 0} \quad (242)$$

ここで,

$$\sqrt{1 - \operatorname{sn}^2 u} = \operatorname{cnu}, \quad \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u} = \operatorname{dnu}$$

また,

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{B(B-A)}{C(C-A)}} g \sqrt{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u} = \sqrt{\frac{D(D-A)}{C(C-A)}} \omega_G \operatorname{dnu} \quad (243)$$

符号は,

$$\vec{G}_0 = A\omega_1 i + B\omega_2 j + C \underbrace{\omega_3}_{\text{ここで決まる}} k \quad (244)$$

周期 $4K$ for u . よって²¹,

$$P = \sqrt{\frac{ABC}{D(C-B)(D-A)}} \frac{4K}{\omega_G} \quad \text{for } t \quad (245)$$

3.3.6 オイラー角の時間変化

今, $\vec{G} = \text{const.}$ だから, \vec{G} を \hat{z} にするような座標変換を行う. (192) を書き換えよう. $\vec{\gamma}$

²⁰ $B\dot{\omega}_2 + \underbrace{(A-C)}_{< 0} \omega_3 \omega_1 = 0$

²¹ $K(t=0) = \frac{\pi}{2}$

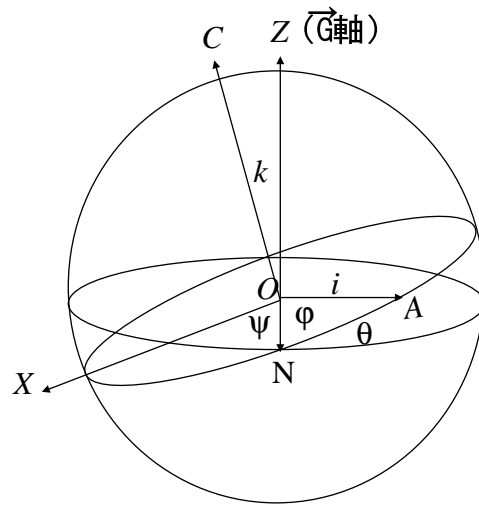


Figure 26: i, j, k と z 軸

は \vec{G} の ABC 軸に対する方向余弦だから,

$$\begin{cases} G\gamma_1 = GS\left(\frac{i}{OZ}\right) = G \sin \varphi \sin \theta = A\omega_1 \\ G\gamma_2 = GS\left(\frac{j}{OZ}\right) = G \cos \varphi \sin \theta = B\omega_2 \\ G\gamma_3 = GS\left(\frac{k}{OZ}\right) = G \cos \theta = C\omega_3 \end{cases} \quad (246)$$

ここで,

$$i = \cos \varphi \cdot ON + \sin \varphi \cdot OM \quad (247)$$

$$j = \cos \varphi \cdot OM - \sin \varphi \cdot ON \quad (248)$$

$$k = OC \quad (249)$$

これより²²,

$$\text{cet} \varphi = \frac{B\omega_2}{A\omega_1} = \sqrt{\frac{B(C-A)}{A(C-B)}} \text{tn}u \quad (250)$$

$$\cos \theta = \frac{C\omega_3}{G} = \sqrt{\frac{C(D-A)}{D(C-A)}} \text{dn}u \quad (251)$$

(192) の2つ目より,

$$\dot{\psi} = \frac{1}{\sin \theta} (\omega_1 \sin \varphi + \omega_2 \cos \varphi) = \frac{A\omega_1^2 + B\omega_2^2}{G \sin^2 \theta} = G \frac{A\omega_1^2 + B\omega_2^2}{A^2\omega_1^2 + B^2\omega_2^2}$$

²² $\text{tn}u = \frac{\text{sn}u}{\text{cn}u}$

$$= G \frac{C - B + (B - A)\text{sn}^2 u}{A(C - B) + C(B - A)\text{sn}^2 u} = \frac{G}{A} \left[\frac{1 + \frac{B-A}{C-B}\text{sn}^2 u}{1 + \frac{C}{A} \underbrace{\frac{(B-A)}{(C-B)}}_{-\alpha^2} \text{sn}^2 u} \right] \quad (252)$$

すると,

$$\begin{aligned} \psi &= \psi_0 + \frac{G}{A} \int_{t_0} \frac{1 - \frac{A}{C}\alpha^2 \text{sn}^2 u}{1 - \alpha^2 \text{sn}^2 u} dt \\ &= \psi_0 + \frac{1}{A} \sqrt{\frac{ABCD}{(C-B)(D-A)}} \int_0 \frac{1 - \frac{A}{C}\alpha^2 \text{sn}^2 u}{1 - \alpha^2 \text{sn}^2 u} du \end{aligned} \quad (253)$$

Byrd & Friedman 336:01, 337:01 より, ψ は第3種楕円積分 $\Pi(\psi, \alpha^2, k), \psi = \text{am}u$. これは非常に複雑.

γ :

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1 &= \underbrace{\frac{A\omega_1}{D\omega_G}}_G = \sqrt{\frac{A(C-D)}{D(C-A)}} \text{cn}u \\ \gamma_2 &= \frac{B\omega_2}{D\omega_G} = \sqrt{\frac{B(C-D)}{D(C-B)}} \text{sn}u \\ \gamma_3 &= \frac{C\omega_3}{D\omega_G} = \sqrt{\frac{C(D-A)}{D(C-A)}} \text{dn}u \end{aligned} \right\} \quad (254)$$

3.3.7 $D = C$ の場合

(254) より, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0, \gamma_3 = \text{dn}u \Rightarrow \omega_1 = \omega_2 = 0, \omega_3 = \omega_G = \text{const.}$ ²³.

C 軸の回りに一定角速度で回転.

$C = B$ の場合 $k = 1$. このとき,

$$\left. \begin{aligned} \text{sn}u &\rightarrow \sinh u, \\ \text{cn}u & \\ \text{dn}u & \end{aligned} \right\} \rightarrow \text{sech}u \quad (255)$$

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{A(C-B)}{B(C-A)}} \text{sech}u \rightarrow 0 \quad (256)$$

$$\gamma_2 = \tanh u \rightarrow 1 \quad (257)$$

$$\gamma_3 = \sqrt{\frac{C(B-A)}{B(C-A)}} \text{sech}u \rightarrow 0 \quad (258)$$

$$(259)$$

これより,

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{B(C-B)}{A(C-A)}} \omega_G \text{sech}u \rightarrow 0 \quad (260)$$

²³ $\text{dn}u_{k=1} \equiv 1$

$$\omega_2 = \omega_G \tanh u \rightarrow \omega_G \quad (261)$$

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{B(B-A)}{C(C-A)}} \omega_G \operatorname{sech} u \rightarrow 0 \quad (262)$$

$t \rightarrow \infty$ で B 軸の回りを回転するようになる (もっともこれは安定な解ではない).

3.3.8 $A = B < C$ (扁球)

$$k = 0$$

$$\begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\frac{D(C-D)}{A(C-A)}} \omega_G \cos u \\ \omega_2 = \sqrt{\frac{D(C-D)}{A(C-A)}} \omega_G \sin u \\ \omega_3 = \sqrt{\frac{D(D-A)}{C(C-A)}} \omega_G = \text{const.} \end{cases} \quad (263)$$

$$u = \sqrt{\frac{D(C-A)(D-A)}{A^2 C}} \omega_G (t - t_0) \quad (264)$$

Total

$$\omega = \sqrt{\frac{D(A+C-D)}{AC}} \omega_G = \text{const.} \quad (265)$$

Euler Angle : (??) より,

$$\cot \varphi = \tan u \rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} - u, \quad \cos \theta = \sqrt{\frac{C(D-A)}{D(C-A)}} = \text{const.} \quad (266)$$

$$\underbrace{\dot{\psi} = \frac{G}{A} = \frac{D}{A} \omega_G}_{\text{constant precession}} = \text{const.} \quad (267)$$

$$\vec{\omega} = \underbrace{\dot{\psi}}_{\text{const.}} \cdot \underbrace{\text{OZ}}_{\text{const.}} + \underbrace{\dot{\varphi}}_{\text{const.}} \cdot \underbrace{\text{OC}}_{\text{constant precession (conical rotation)}} \quad (268)$$

幾何学化 : 目で見て分ろう.

- $A > C$:

この2つの円錐が滑べらずに接しながら回転する事と同値であることを示そう. 滑べらないから,

$$ds = ds_C = ds_Z \quad (269)$$

$$ds = a \tan \alpha \cdot \dot{\psi} dt = a \sec \alpha \sin \alpha \dot{\varphi} dt = b \sec \alpha \sin \beta \dot{\varphi} dt = b \tan \beta \dot{\varphi} dt \quad (270)$$

よって, C の回りの回転は $\dot{\varphi}$. よって図で $\vec{\omega}$ は求める (268) と同じもの (C 上で立ってみると $\dot{\varphi} > 0$ となる).

- $A < C$:

今は $\dot{\varphi} < 0, \dot{\psi} > 0$. C 上で立ってみると $\dot{\varphi} < 0$

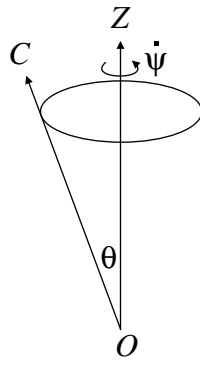


Figure 27: Constant precession

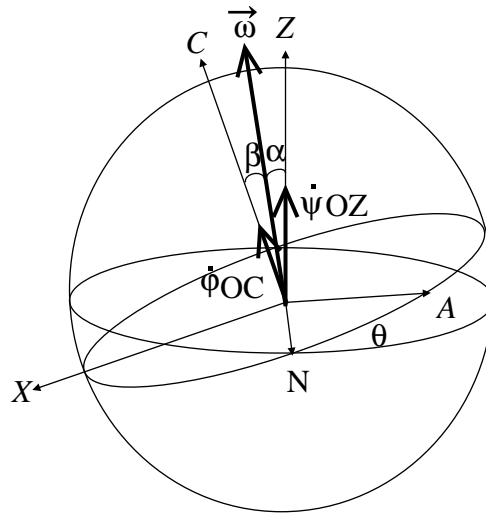


Figure 28: $\vec{\omega}$

3.3.9 Poinsot の方法

次の諸定理は \vec{N} によらず成立する.

Theorem 1 (Poinsot)

$$h = \frac{\omega^2}{\rho^2} \tag{271}$$

ただし, $\vec{\omega}$ と慣性楕円体の交点を P (極) としたとき,

$$\rho = OP \tag{272}$$

ここで,

$$h = 2T = \omega^2 I_\omega \quad (M\ell^4 = 1 \text{ の単位系で}) \quad I_\omega = \frac{1}{\rho^2} \tag{273}$$

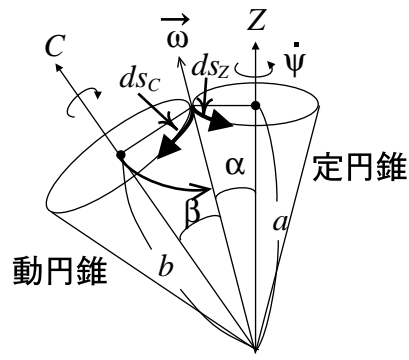


Figure 29: $A > C$

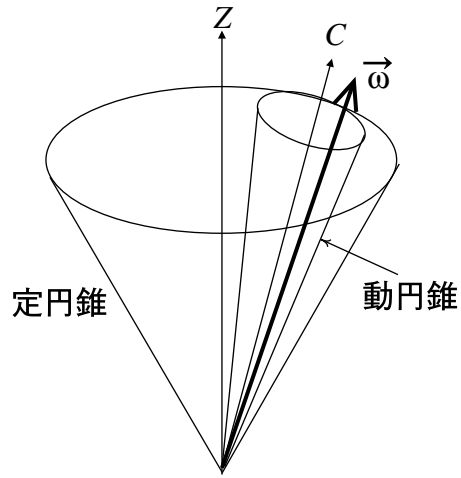


Figure 30:

Theorem 2 (Poinsot) 極における接平面は \vec{G} に垂直.

いま, i, j, k は主慣性軸. よって, 慣性楕円体は²⁴,

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 = 1 \tag{274}$$

$P(\xi_p, \eta_p, \zeta_p)$ における接平面は,

$$A\xi_p\xi + B\eta_p\eta + C\zeta_p\zeta = 1 \tag{275}$$

さて, $\vec{\xi}_p = \frac{\vec{\omega}}{\rho}$ より,

$$A\omega_1\xi + B\omega_2\eta + C\omega_3\zeta = \frac{\omega}{\rho}, \quad \vec{G} \cdot \vec{\xi} = \frac{\omega}{\rho} \tag{276}$$

²⁴ $M\ell^4 = 1$ で normalize してある.

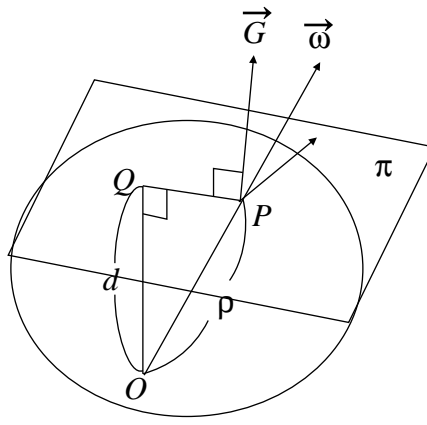


Figure 31: 接平面

一方,

$$\vec{G} = A\omega_1 i + B\omega_2 j + C\omega_3 k \quad (277)$$

よって,

$$\vec{G} \perp \text{接平面} \quad (278)$$

Theorem 3 (Poinsot)

$$d = \frac{\sqrt{h}}{G} \quad (279)$$

$$d = \frac{\omega}{\rho} \frac{1}{A^2\omega_1^2 + B^2\omega_2^2 + C^2\omega_3^2} = \frac{\sqrt{h}}{G} \quad (280)$$

これらの Theorem を使って,

自由回転: \vec{T}, \vec{G} : 一定

$$\left. \begin{array}{l} h = D\omega_G^2 \\ G D\omega_G \end{array} \right\} \Rightarrow D, \omega_G: \text{一定} \quad (281)$$

Theorem 3 より,

$$d = \frac{\sqrt{h}}{G} = \frac{1}{\sqrt{D}}, \quad A = \frac{1}{a^2}, \quad B = \frac{1}{b^2}, \quad C = \frac{1}{c^2}, \quad D = \frac{1}{d^2} \quad (282)$$

ここで a, b, c は慣性楕円体の半長軸. よって D の意味づけができる. さて,

$$OQ = d \frac{\vec{G}}{G} = \text{const.} \quad (283)$$

ここで, Q は固定点. よってこの接平面 π は定平面である. この定平面と楕円体の接点が極である. 楕円体は π に接しながら転がる訳である.

$$\omega = \sqrt{h}\rho \quad (284)$$

3.3.10 ポルホードとハーポルホード

ポルホード, ハーポルホード²⁵

ポルホード (Polhode) 極が慣性楕円体上に描く軌跡. C の回りの動円錐が楕円体を切り取る切口.

ハーポルホード (Herpolhode) ω と定平面 π との交点の軌跡.

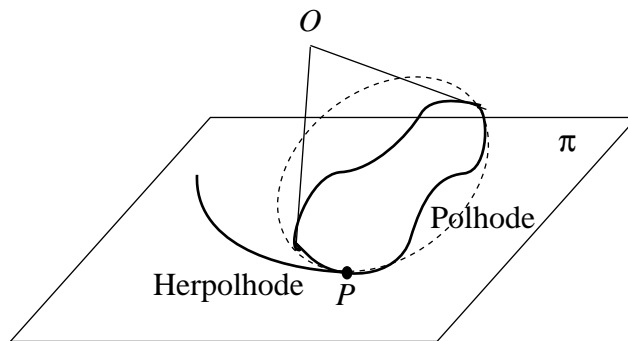


Figure 32: ポルホードとハーポルホード

$$(h = A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2) \times G^2 \quad (285)$$

$$(G^2 = A^2\omega_1^2 + B^2\omega_2^2 + C\omega_3^2) \times h \quad (286)$$

↓

$$(Ah - G^2)A\omega_1^2 + (Bh - G^2)B\omega_2^2 + (Ch - G^2)C\omega_3^2 = 0 \quad (287)$$

$\vec{\omega}$ 上の一点を (ξ, η, ζ) とすると,

$$(Ah - G^2)A\xi^2 + (Bh - G^2)B\eta^2 + (Ch - G^2)C\zeta^2 = 0 \quad (288)$$

$G = D\omega_G, h = D\omega_G^2$ より,

$$A(A - D)\xi^2 + B(B - D)\eta^2 + C(C - D)\zeta^2 = 0 \quad (289)$$

これは $\vec{\omega}$ の方向を決める式.

- Polhode

(289) と $A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 = 1$ との交点. (289) は,

$$A^2\xi^2 + B^2\eta^2 + C^2\zeta^2 = D, \quad A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 = 1 \quad (290)$$

²⁵ Poinsot による術語.

結局ポルホードの方程式は,

$$\frac{\xi^2}{a^4} + \frac{\eta^2}{b^4} + \frac{\zeta^2}{c^4} = \frac{1}{d^2}, \quad \frac{\xi^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{b^2} + \frac{\zeta^2}{c^2} \tag{291}$$

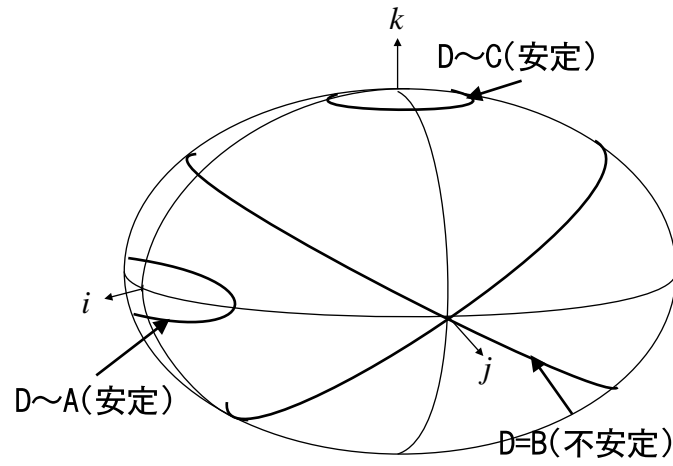


Figure 33: ポルホード

4 正準方程式

4.1 オイラー角

$\psi, \theta, \varphi, p_\psi, p_\theta, p_\varphi$ を考えよう (後は正準変換で移れば良い). (192) より,

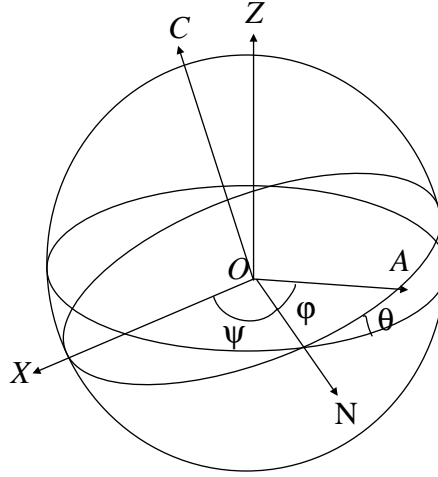


Figure 34: ψ, θ, φ

$$\left. \begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\psi} \sin \theta \sin \varphi + \dot{\theta} \cos \varphi \\ \omega_2 &= \dot{\psi} \sin \theta \cos \varphi - \dot{\theta} \sin \varphi \\ \omega_3 &= \dot{\psi} \cos \theta \end{aligned} \right\} \quad (292)$$

$$T = \frac{1}{2} (A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2) \quad (293)$$

共役な運動量は,

$$\left. \begin{aligned} p_\psi &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = A\omega_1 \sin \theta \sin \varphi + B\omega_2 \sin \theta \cos \varphi + C\omega_3 \cos \theta \\ p_\theta &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = A\omega_1 \cos \varphi - B\omega_2 \sin \varphi \\ p_\varphi &= \frac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = C\omega_3 \end{aligned} \right\} \quad (294)$$

(294);

$$\left. \begin{aligned} A\omega_1 &= p_\theta \cos \varphi + \frac{\sin \varphi}{\cos \theta} (p_\psi - p_\varphi \cos \theta) \\ B\omega_2 &= -p_\theta \sin \varphi + \frac{\cos \varphi}{\sin \theta} (p_\psi - p_\varphi \sin \theta) \\ C\omega_3 &= p_\varphi \end{aligned} \right\} \quad (295)$$

一方, 全角運動量 \vec{G} は,

$$G^2 = A^2\omega_1^2 + B^2\omega_2^2 + C^2\omega_3^2 = p_\theta^2 + p_\varphi^2 + \frac{1}{\sin^2 \theta} (p_\psi - p_\varphi \cos \theta)^2 \quad (296)$$

運動方程式は,

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{dt}(p_\psi, p_\theta, p_\varphi) &= \frac{\partial F}{\partial(\psi, \theta, \varphi)} \\ \frac{d}{dt}(\psi, \theta, \varphi) &= -\frac{\partial F}{\partial(p_\psi, p_\theta, p_\varphi)} \\ F &= -T = -\frac{1}{2}(A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + \omega_3^2) \quad \text{自由回転} \end{aligned} \right\} \quad (297)$$

一般にはハミルトニアンは,

$$F = -T + U(\psi, \theta, \varphi), \quad \nabla U = \vec{N} \quad (298)$$

4.2 Andoyer(アンドワイエ)変数

$$\left(\begin{array}{cc} p_\psi & , & \psi \\ p_\theta & , & \theta \\ p_\varphi & , & \varphi \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cc} L = p_\varphi & , & \ell \\ G & , & g \\ H = p_\psi & , & h \end{array} \right) \quad (299)$$

意味:

- L : \vec{G} の C 軸成分
- H : \vec{G} の z 軸成分
- G : 全角運動量

正準変換:

母関数,

$$S = S(\underbrace{L, G, H}_{\text{新運動量}}, \underbrace{\psi, \theta, \varphi}_{\text{旧座標}}) \quad (300)$$

$$(p_\psi, p_\theta, p_\varphi) = \frac{\partial S}{\partial(\psi, \theta, \varphi)}, \quad (\ell, g, h) = \frac{\partial S}{\partial((L, G, H))} \quad (301)$$

p_ψ らを L, G, H で表すと,

$$\left. \begin{aligned} p_\psi &= H \\ p[\varphi] &= G \\ p_\theta &= \pm \left[G^2 - L^2 - \frac{1}{\sin^2 \theta} (H - L \cos \theta)^2 \right]^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (302)$$

$$\begin{aligned} S &= \int p_\psi d\psi + \int p_\varphi d\varphi + \int p_\theta d\theta \\ &= H\psi + L\varphi - \int_{\theta^*}^{\theta} \left[G^2 - L^2 - \frac{1}{\sin^2 \theta} (H - L \cos \theta)^2 \right]^{1/2} d\theta \end{aligned} \quad (303)$$

ここで θ^* は,

$$\left[G^2 - L^2 - \frac{1}{\sin^2 \theta} (H - L \cos \theta)^2 \right] = 0 \quad (304)$$

の大きな方の根である. $0 < \theta < 2\pi, \theta^* = \theta(L, G, H)$. $t = \cos \theta^*$ とおく.

$$(G^2 - L^2)(1 - t^2) - (H - Lt)^2 = 0 \Rightarrow G^2 t^2 - 2HLt + L^2 - G^2 + H^2 = 0 \quad (305)$$

よって,

$$t = \frac{1}{G^2} \left[HL \pm \sqrt{(G^2 - H^2)(G^2 - L^2)} \right], \quad \cos I = \frac{H}{G}, \quad \cos J = \frac{L}{G}. \quad 0 \leq I, J \leq \pi \quad (306)$$

$$\cos \theta = \cos I \cos J \pm \sin I \sin J = \cos(I \mp J) \quad (307)$$

より,

$$\theta = \pm(I \pm J), \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \theta^* = I + J & \text{大きい方} \\ \theta^* = |I - J| & \text{小さい方} \end{cases} \quad (308)$$

ℓ, g, h の決定

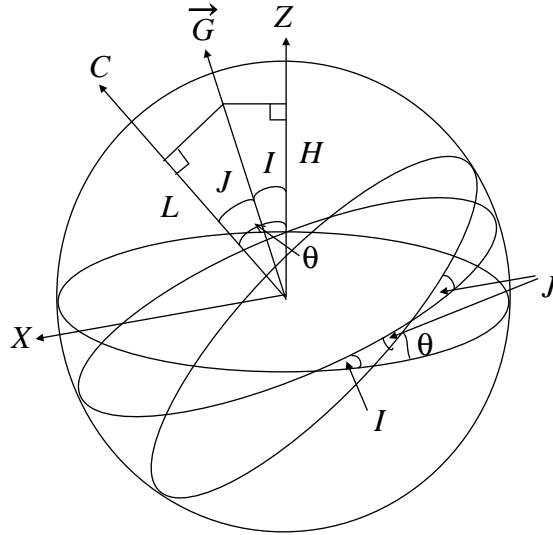


Figure 35: I, J

$$\begin{aligned} \ell &= \frac{\partial S}{\partial L} \\ &= \varphi - \int_{\theta^*(L,G,H)}^{\theta} \frac{\partial}{\partial L} \left[G^2 - L^2 - \frac{1}{\sin^2 \theta} (H - L \cos \theta)^2 \right]^{1/2} d\theta \\ &\quad + \left[G^2 - L^2 - \frac{1}{\sin^2 \theta} (H - L \cos \theta)^2 \right]_{\theta=\theta^*} \frac{\partial \theta^*}{\partial L} \\ &= \varphi - \int_{\theta^*(L,G,H)}^{\theta} \left[-L + \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} (H - L \cos \theta) \right] \left[G^2 - L^2 - \frac{1}{\sin^2 \theta} (H - L \cos \theta)^2 \right]^{-1/2} d\theta \\ &\quad + \left[G^2 - L^2 - \frac{1}{\sin^2 \theta} (H - L \cos \theta)^2 \right]_{\theta=\theta^*} \frac{\partial \theta^*}{\partial L} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \varphi - \int_{\theta^*}^{\theta} \frac{-\cos J + \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} (\cos I - \cos J \cos \theta)}{\left[1 - \cos^2 J - \frac{1}{\sin^2 \theta} (\cos I - \cos J \cos \theta)^2\right]^{1/2}} d\theta \\
&= \varphi - \int_{\theta^*}^{\theta} \frac{-\cos J + \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} (\cos I - \cos J \cos \theta)}{\sin J \left[1 - \frac{1}{\sin^2 \theta \sin^2 J} (\cos I - \cos J \cos \theta)^2\right]^{1/2}} d\theta
\end{aligned} \tag{309}$$

ここで,

$$\cos I = \cos I \cos \theta + \sin J \sin \theta \cos \gamma \Rightarrow \cos I - \cos J \cos \theta = \sin J \sin \theta \cos \gamma \tag{310}$$

より,

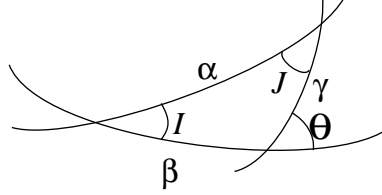


Figure 36: α, β, γ

$$\ell = \varphi - \int_{\theta^*}^{\theta} \frac{-\cos J + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \sin J \cos \gamma}{\sin J \cos \gamma} d\theta \tag{311}$$

変数変換,

$$-\sin \gamma d\gamma = \frac{1}{\sin J} \left[-\cos I \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} + \frac{\cos J}{\sin^2 \theta} \right] d\theta \tag{312}$$

$\theta \rightarrow \theta^*, \gamma \rightarrow 0$,

$$\ell = \varphi - \int_0^{\gamma} d\gamma = \varphi - \gamma \tag{313}$$

同様にして,

$$h = \psi - \int_{\theta^*}^{\theta} \frac{H - L \cos \theta}{\sin^2 \theta} \left[G^2 - L^2 - \frac{(H - L \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} \right]^{-1/2} d\theta = \psi - \beta \tag{314}$$

$$g = -G \int_{\theta^*}^{\theta} \left[G^2 - L^2 - \frac{(H - L \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} \right]^{-1/2} d\theta = \alpha \tag{315}$$

$$p_{\psi} = L \tag{316}$$

$$p_{\varphi} = H \tag{317}$$

$$\begin{aligned}
p_{\theta}^2 &= G^2 - L^2 - \frac{(\cos I - \cos J \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} \\
&= G^2 \left[\sin^2 J - \frac{(\cos I - \cos J \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} \right] \\
&= G^2 \sin^2 J \sin^2 \gamma
\end{aligned} \tag{318}$$

$$p_{\theta} = \pm G \sin J \sin \gamma \tag{319}$$

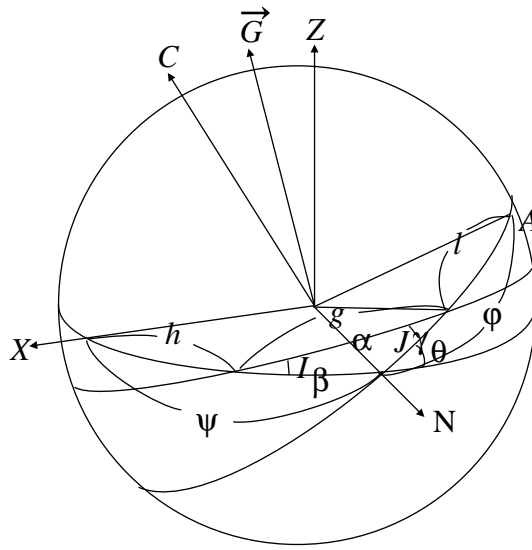


Figure 37: $h = \varphi - \gamma, g = \alpha, l = \psi - \beta$

幾何学的に,

$$\begin{cases} A\omega_1 = G \sin J \sin \ell \\ B\omega_2 = G \sin J \cos \ell \\ C\omega_3 = G \cos \ell \end{cases} \quad (320)$$

$$\begin{aligned} & A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2 \\ &= \frac{1}{A}G^2 \sin^2 J \sin^2 \ell + \frac{1}{B}G^2 \sin^2 J \cos^2 \ell + \frac{1}{C}G^2 \cos^2 J \\ &= \frac{1}{A}(G^2 - L^2) \sin^2 \ell + \frac{1}{B}(G^2 - L^2) \cos^2 \ell + \frac{1}{C}L^2 \end{aligned} \quad (321)$$

$$2T = \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{2A} - \frac{1}{2B} \right) L^2 + \left(\frac{1}{2A} + \frac{1}{2B} \right) G^2 + \left(\frac{1}{2B} - \frac{1}{2A} \right) (G^2 - L^2) \cos 2\ell \quad (322)$$

よって, 運動方程式,

$$\frac{d}{dt}(L, G, H) = \frac{\partial F}{\partial(\ell, g, h)}, \quad \frac{d}{dt}(\ell, g, h) = -\frac{\partial F}{\partial(L, G, H)}, \quad F = -T + U \quad (323)$$

明らかに $A = B$ だと直ちに積分できる. 一般には $A \simeq B$ なので,

$$F_0 = -\frac{1}{2} \left[(\quad) L^2 + (\quad) G^2 \right] \quad (324)$$

$$F_1 = -\frac{1}{2} \left[(\quad) (G^2 - L^2) \cos 2\ell \right] \quad (325)$$

と取って, 摂動計算を行う. Kepler 運動とは違い, これは作用変数, 角変数になっていない (T に ℓ も含まれているから).

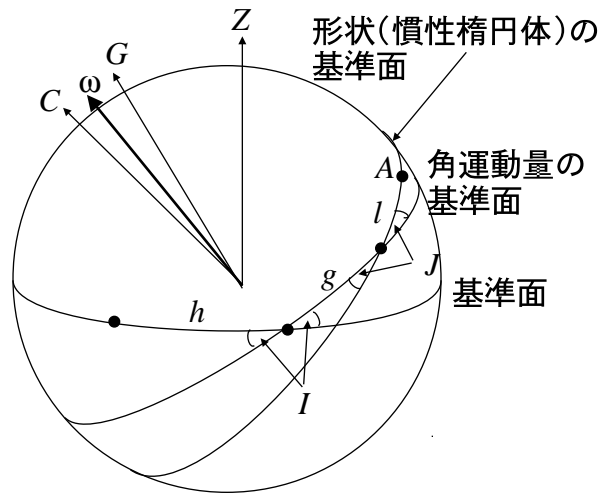


Figure 38: h, g, ℓ, ω

4.3 重心の回りの自由回転

4.3.1 $A = B$ の場合

$$F = -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) L^2 + \frac{1}{A} G^2 \right] \quad (326)$$

解は,

$$\begin{cases} L, G, H, h = \text{const.} \\ \ell = \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) Lt + \ell_0 \quad ; \quad \text{slow} \\ g = \frac{1}{A} G^2 t + g_0 \quad ; \quad \text{fast} \end{cases} \quad (327)$$

自転軸は,

$$\begin{aligned} A\omega_1 &= G \sin J \sin \ell & \omega_1 &= \frac{G}{A} \sin J \sin \ell \\ A\omega_2 &= G \sin J \cos \ell & \Rightarrow \omega_2 &= \frac{G}{A} \sin J \cos \ell \\ C\omega_3 &= G \cos J & \omega_3 &= \frac{G}{C} \cos J \end{aligned} \quad (328)$$

$$\omega^2 = \frac{G^2}{A^2} \sin^2 J + \frac{G^2}{C^2} \cos^2 J \simeq \frac{G^2}{A^2} \quad (329)$$

$\vec{\omega}$ は C 軸の回りを ℓ でゆっくり precession を行う (経度変化) .

4.3.2 $A \neq B < C$ の場合

解は G, H, h は const.

$$\frac{dL}{dt} = \left(\frac{1}{2B} - \frac{1}{2A} \right) (G^2 - L^2) \sin 2\ell \quad (330)$$

$$\frac{d\ell}{dt} = \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{2A} - \frac{1}{2B} \right) L + \left(\frac{1}{2A} - \frac{1}{2B} \right) L \cos 2\ell \quad (331)$$

$$\frac{dg}{dt} = \left(\frac{1}{2A} + \frac{1}{2B} \right) G + \left(\frac{1}{2B} - \frac{1}{2A} \right) G \cos 2\ell \quad (332)$$

さて、ハミルトニアンは一つの積分であるから、

$$\left(\frac{1}{4A} + \frac{1}{4B} - \frac{1}{4C}\right)L^2 - \left(\frac{1}{4A} + \frac{1}{4B}\right)G^2 + \left(\frac{1}{4A} - \frac{1}{4B}\right)(G^2 - L^2)\cos 2\ell = \text{const.} \quad (333)$$

今、 $t = t_0, \ell = 0, L = L_0$ とする。すると $L_0 = L_{\min}$ 。

$$\ell = 0 \quad \Rightarrow \quad \left.\frac{dL}{dt}\right|_0 = 0 \quad (334)$$

しかも、

$$\frac{d\ell}{dt} = \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{B}\right)L < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dL}{dt} \text{ は 負} \rightarrow 0 \rightarrow \text{正} \quad (335)$$

よって、

$$\left(\frac{1}{2A} - \frac{1}{2B}\right)(G^2 - L^2)\cos 2\ell = \left(\frac{1}{2A} + \frac{1}{2B} - \frac{1}{C}\right)(L_0^2 - L^2) + \left(\frac{1}{2A} + \frac{1}{2B}\right)(G^2 - L_0^2) \quad (336)$$

(330) とこれより ℓ を消去しよう。

$$\begin{aligned} \left(\frac{dL}{dt}\right)^2 &= \left[\left(\frac{1}{2A} - \frac{1}{2B}\right)(G^2 - L^2)\right]^2 - \left[\left(\frac{1}{2A} + \frac{1}{2B} - \frac{1}{C}\right)(L_0^2 - L^2) + \left(\frac{1}{2A} + \frac{1}{2B}\right)(G^2 - L_0^2)\right]^2 \\ &= \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{C}\right)(L_0^2 - L^2) \left[\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{C}\right)L^2 + \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{B}\right)L_0^2 + \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A}\right)G^2\right] \\ &= \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{C}\right)\left(\frac{1}{B} - \frac{1}{C}\right)(L^2 - L_0^2)(D^2 - L^2) \end{aligned} \quad (337)$$

$$D \equiv \frac{\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B}\right)G^2 + \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{C}\right)L_0^2}{\frac{1}{A} - \frac{1}{C}} > L_0^2 \quad (G > L_0 \text{ より}) \quad (338)$$

よって²⁶、

$$\int_{L_0}^L \frac{dL}{\sqrt{(D^2 - L^2)(L^2 - L_0^2)}} = \frac{1}{C} \sqrt{\frac{(C-A)(C-B)}{AB}} (t - t_0) \quad (339)$$

$$= \frac{1}{D} u, \quad L = L_0 \text{ndu}, \quad k^2 = \frac{D^2 - L_0^2}{D^2} = \frac{C(B-A)(G^2 - L_0^2)}{C(B-A)G^2 + A(C-B)L_0^2} \quad (340)$$

ここで $\text{ndu} = \frac{1}{\text{dn}u}$ 。

$$u = \frac{D}{C} \sqrt{\frac{(C-A)(C-B)}{AB}} (t - t_0) \quad (341)$$

cf

$$u = \sqrt{\frac{D^*(C-B)(D^* - A)}{ABC}} (t - t_0) \quad (342)$$

$$\begin{aligned} 2T = D^* \omega_G^2 &= \frac{G^2}{D^*} = \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{B}\right)L_0^2 + \frac{1}{B}G^2 \\ \left(\frac{1}{D^*} - \frac{1}{A}\right)G^2 &= \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right)D^2 \end{aligned} \quad (343)$$

²⁶ Byrd & Friedman 217.00 より。

よって,

$$\begin{aligned}
u &= \sqrt{\frac{C-B}{BC} \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{D^*} \right) G^2(t-t_0)} \\
&= \sqrt{\frac{C-B}{BC} \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A} \right) D^2(t-t_0)} \\
&= \frac{D}{C} \sqrt{\frac{(C-B)(C-A)}{AB}} (t-t_0)
\end{aligned} \tag{344}$$

より, 一致している (あたりまえ). すると (331) に代入すると,

$$\frac{d(2\ell)}{\frac{2}{C} - \frac{1}{A} - \frac{1}{B} + \left(\frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) \cos 2\ell} = Ldt = \frac{C}{D} \sqrt{\frac{AB}{(C-A)(C-B)}} L_0(ndu)du \tag{345}$$

積分すると,

$$\begin{aligned}
\int_0^\ell \text{左辺} &= \frac{2}{\text{sqrt}\alpha^2 - \beta^2} \tan^{-1} \left[\frac{\alpha - \beta}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}} \tan \ell \right] \quad (\alpha^2 > \beta^2) \\
&= -C \sqrt{\frac{AB}{(C-A)(C-B)}} \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{B(C-A)}{A(C-B)}} \tan \ell \right)
\end{aligned} \tag{346}$$

$$\int_0^u \text{右辺} = \frac{C}{D} \sqrt{\frac{AB}{(C-A)(C-B)}} L_0 \int_0^u \frac{du}{\text{dnu}} \tag{347}$$

315.01 より,

$$\begin{aligned}
\int \frac{du}{\text{dnu}} &= \frac{1}{k'} \tan^{-1} \left(\frac{k' \text{snu} - \text{cnu}}{k' \text{snu} + \text{cnu}} \right) \Big|_0^u \\
&= \frac{D}{L_0} \left[\tan^{-1} \left(\frac{\frac{L_0}{D} \text{snu} - \text{cnu}}{\frac{L_0}{D} \text{snu} + \text{cnu}} \right) + \frac{\pi}{4} \right]
\end{aligned} \tag{348}$$

よって,

$$\begin{aligned}
-\sqrt{\frac{A(C-B)}{A(C-B)}} \tan \ell &= \frac{1 + \frac{\frac{L_0}{D} \text{snu} - \text{cnu}}{\frac{L_0}{D} \text{snu} + \text{cnu}}}{1 - \frac{\frac{L_0}{D} \text{snu} - \text{cnu}}{\frac{L_0}{D} \text{snu} + \text{cnu}}} \\
&= \frac{L_0 \text{snu}}{D \text{cnu}} = \frac{L_0}{D} \text{tnu}
\end{aligned} \tag{349}$$

したがって,

$$\tan \ell = \sqrt{\frac{A(C-B)}{B(C-A)}} \frac{L_0}{D} \text{tnu} \tag{350}$$

最後に,

$$\begin{aligned}
g &= g_0 + \left(\frac{1}{2A} - \frac{1}{2B} \right) G \frac{C}{D} \sqrt{\frac{AB}{(C-A)(C-B)}} u \\
&\quad + \left(\frac{1}{2B} - \frac{1}{2A} \right) G \frac{C}{D} \sqrt{\frac{AB}{(C-A)(C-B)}} \int_0^{2\ell} \cos 2\ell du
\end{aligned} \tag{351}$$

$$\begin{aligned}
\cos 2\ell &= \frac{1 - \tan^2 \ell}{1 + \tan^2 \ell} = \frac{1 - \frac{A(C-B)}{B(C-A)} \frac{L_0^2}{D^2} \tan^2 u}{1 + \frac{A(C-B)}{B(C-A)} \frac{L_0^2}{D^2} \tan^2 u} \\
&= \frac{1 - \left[1 - \frac{A(C-B)}{B(C-A)} \frac{L_0^2}{D^2}\right] \operatorname{sn}^2 u}{1 - \left[1 + \frac{A(C-B)}{B(C-A)} \frac{L_0^2}{D^2}\right] \operatorname{sn}^2 u} \\
&\equiv \frac{1 - \alpha_+^2 \operatorname{sn}^2 u}{1 - \alpha_-^2 \operatorname{sn}^2 u} \\
&= \frac{1}{\alpha_-^2} \left(\alpha_+^2 + \frac{\alpha_-^2 - \alpha_+^2}{1 - \alpha_-^2 \operatorname{sn}^2 u} \right) \tag{352}
\end{aligned}$$

よって,

$$\int \cos 2\ell du = \left(\frac{\alpha_+}{\alpha_-} \right)^2 u + \left(\frac{\alpha_-^2 - \alpha_+^2}{\alpha_-^2} \right) \int_0^u \frac{du}{1 - \alpha_-^2 \operatorname{sn}^2 u} \tag{353}$$

最後の積分は 400.01. この時, $\alpha_-^2 > k^2 = 1 - \frac{L_0^2}{D^2}$. 瞬間回転軸 $\vec{\omega}$ は,

$$\omega_1 = \frac{1}{A} \sqrt{G^2 - L^2} \sin \ell, \quad \omega_2 = \frac{1}{B} \sqrt{G^2 - L^2} \cos \ell, \quad \omega_3 = \frac{1}{C} L \tag{354}$$

$$G^2 - L^2 = G^2 - L_0^2 \operatorname{nd}^2 u = G^2 - \frac{L_0^2}{1 - k^2 \operatorname{sn}^2 u} \tag{355}$$

$$(G^2 - L^2) \sin^2 \ell = (G^2 - L^2) \frac{\tan^2 \ell}{1 + \tan^2 \ell} = \frac{A(C-B)L_0^2}{B(C-A)D^2} (G^2 - L_0^2) \operatorname{sd}^2 u \tag{356}$$

ここで, $\operatorname{sd}u = \frac{\operatorname{sn}u}{\operatorname{dn}u}$. よって,

$$\omega_1 = \frac{1}{A} \sqrt{(G^2 - L_0^2)} \sqrt{\frac{A(C-B)}{B(C-A)}} \frac{L_0}{D} \operatorname{sd}u \tag{357}$$

$$\omega_2 = \frac{1}{B} \sqrt{(G^2 - L_0^2)} \operatorname{cn}u \tag{358}$$

$$\omega_3 = \frac{1}{C} L_0 \operatorname{nd}u \tag{359}$$

ここで, $\operatorname{cd}u = \frac{\operatorname{cn}u}{\operatorname{dn}u}$.

cf

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{D^*(C - D^*)}{A(C - A)}} \omega_G \operatorname{cn}u \tag{360}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{D^{(*)}(C - D^*)}{B(C - B)}} \omega_G \operatorname{sn}u \tag{361}$$

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{D^*(D^* - A)}{C(C - A)}} \omega_G \operatorname{dn}u \tag{362}$$

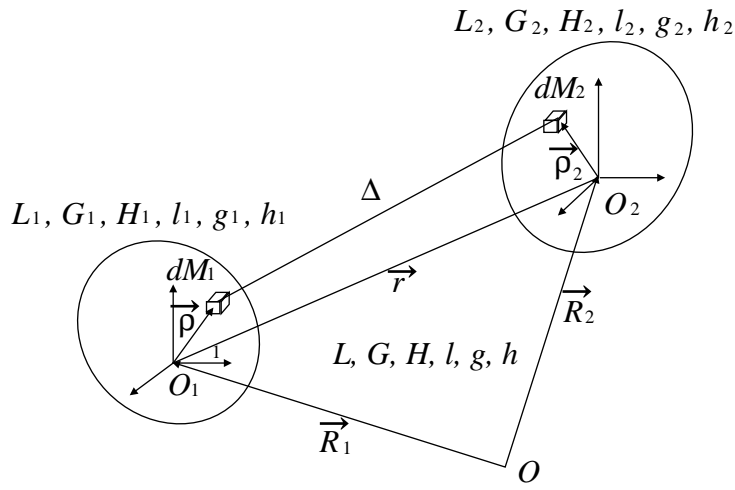


Figure 39: 有限2体問題

4.4 有限2体問題

ポテンシャル

$$U = k^2 \int \frac{dM_1 dM_2}{\Delta} \quad ; \quad \text{力関数} \quad (= -U; \text{ポテンシャル}) \quad (363)$$

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= |(\vec{R}_2 - \vec{\rho}_2) - (\vec{R}_1 - \vec{\rho}_1)| = |\vec{r} + \vec{\rho}_2 - \vec{\rho}_1| \\ &= r^2 + 2\vec{r} \cdot (\vec{\rho}_2 - \vec{\rho}_1) + (\vec{\rho}_2 - \vec{\rho}_1)^2 \\ &= r^2 \left[1 + \frac{2\vec{r} \cdot (\vec{\rho}_2 - \vec{\rho}_1)}{r^2} + \frac{(\vec{\rho}_2 - \vec{\rho}_1)^2}{r^2} \right] \\ &= r^2 \left[1 + \frac{2\vec{r} \cdot (\vec{\rho}_2 - \vec{\rho}_1)}{r|\vec{\rho}_2 - \vec{\rho}_1|} \frac{|\vec{\rho}_2 - \vec{\rho}_1|}{r} + \frac{(|\vec{\rho}_2 - \vec{\rho}_1|)^2}{r^2} \right] \end{aligned} \quad (364)$$

普通,

$$\frac{|\vec{\rho}_2 - \vec{\rho}_1|}{r} \ll 1$$

よって, ルジャントルで展開して,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta} &= \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|\vec{\rho}_2 - \vec{\rho}_1|}{r} \right)^n P_n \left(\frac{\vec{r} \cdot (\vec{\rho}_2 - \vec{\rho}_1)}{r|\vec{\rho}_2 - \vec{\rho}_1|} \right) \\ &= \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot (\vec{\rho}_2 - \vec{\rho}_1) + \frac{1}{r^3} \left\{ \frac{3}{2} \frac{[\vec{r} \cdot (\vec{\rho}_2 - \vec{\rho}_1)]^2}{r^2} - \frac{1}{2(\vec{\rho}_2 - \vec{\rho}_1)^2} + \dots \right\} \end{aligned} \quad (365)$$

よって,

$$U = U_0 + U_1 + U_2 + \dots \quad (366)$$

$$U_0 = k^2 \iint \frac{1}{r} dM_1 dM_2 = k^2 \frac{M_1 M_2}{r} \quad (367)$$

$$\begin{aligned}
U_1 &= k^2 \int \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot (\vec{\rho}_2 - \vec{\rho}_1) dM_1 dM_2 \\
&= \frac{k^2}{r^3} \vec{r} \left\{ M_2 \int \vec{\rho}_2 dM_1 - M_1 \int \vec{\rho}_1 dM_2 \right\} \\
&= 0 \quad \left(\vec{\rho} \text{は重心からの距離だから } \int \vec{\rho} dM = 0 \right)
\end{aligned} \tag{368}$$

$$U_2 = \frac{k^2}{r^3} \int \left\{ \frac{3}{2} \frac{[\vec{r} \cdot (\vec{\rho}_2 - \vec{\rho}_1)]^2}{r^2} - \frac{1}{2} (\vec{\rho}_1 - \vec{\rho}_2) \right\} dM_1 dM_2 \tag{369}$$

片方の M について ρ の 1 次ではゼロより,

$$\begin{aligned}
U_2 &= \frac{k^2}{r^3} \int \left\{ \frac{3}{2} \left(\frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{\rho}_1 \right)^2 + \frac{3}{2} \left(\frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{\rho}_2 \right)^2 - \frac{1}{2} \vec{\rho}_1^2 - \frac{1}{2} \vec{\rho}_2^2 \right\} dM_1 dM_2 \\
&= \frac{k^2 M_2}{r^3} \int \left\{ \frac{3}{2} \left(\frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{\rho}_1 \right) - \frac{1}{2} \vec{\rho}_1^2 \right\} dM_1 + \frac{k^2 M_1}{r^3} \int \left\{ \frac{3}{2} \left(\frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{\rho}_2 \right) - \frac{1}{2} \vec{\rho}_2^2 \right\} dM_2 \tag{370}
\end{aligned}$$

Fig. 40 より,

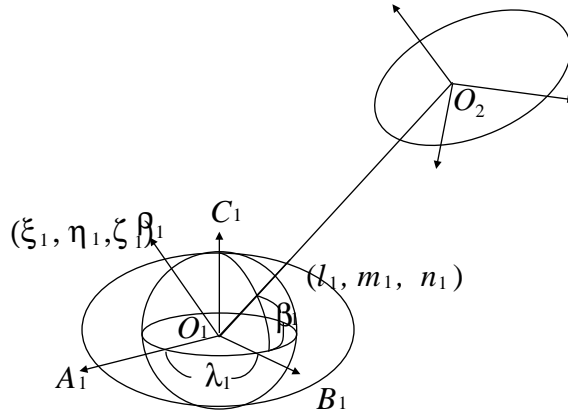


Figure 40: 有限 2 体問題

$$\begin{aligned}
&\frac{3}{2} \left(\frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{\rho}_1 \right)^2 - \frac{1}{2} \vec{\rho}_1^2 \\
&= \frac{3}{2} (\ell_1 \xi_1 + m_1 \eta_1 + \zeta_1 n_1)^2 \frac{1}{2} (\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2) \\
&= \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 - \frac{3}{2} \left\{ \ell_1^2 (\eta_1^2 + \zeta_1^2) + m_1^2 (\xi_1^2 + \zeta_1^2) + n_1^2 (\xi_1^2 + \eta_1^2) \right. \\
&\quad \left. - 2(\ell_1 m_1 \xi_1 \eta_1 + m_1 n_1 \eta_1 \zeta_1 + n_1 \ell_1 \zeta_1 \xi_1) \right\}
\end{aligned} \tag{371}$$

今、主慣性主軸をとっているから、慣性積 $D = E = F = 0$ より,

$$\begin{aligned}
&\int \left\{ \frac{3}{2} \left(\frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{\rho}_1 \right)^2 - \frac{1}{2} \vec{\rho}_1^2 \right\} dM_1 \\
&= \frac{1}{2} ((A_1 + B_1 + C_1)) - \frac{3}{2} (\ell_1^2 A_1 + m_1^2 B_1 + n_1^2 C_1)
\end{aligned} \tag{372}$$

ここで,

$$\ell_1 = \cos \beta_1 \cos \lambda_1, \quad m_1 = \cos \beta_1 \sin \lambda_1, \quad n_1 = \sin \beta_1 \quad (373)$$

より,

$$\ell_1^2 A_1 + m_1^2 B_1 + n_1^2 C_1 = \frac{1}{2}(A_1 + B_1) + \left(C_1 - \frac{A_1 + B_1}{2}\right) \sin^2 \beta_1 + \frac{1}{2}(A_1 - B_1) \cos^2 \beta_1 \cos 2\lambda_1 \quad (374)$$

よって,

$$\begin{aligned} & \int dM_1 \left[\frac{3}{2} \left(\frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{\rho}_1 \right)^2 - \frac{1}{2} \rho_1^2 \right] \\ &= \left(\frac{A_1 + B_1}{2} - C_1 \right) P_2(\sin \beta_1) + \frac{1}{4}(B_1 - A_1) P_2^2(\sin \beta_1) \cos \lambda_1 \end{aligned} \quad (375)$$

$$\begin{aligned} & \int dM_2 \left[\frac{3}{2} \left(\frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{\rho}_2 \right)^2 - \frac{1}{2} \rho_2^2 \right] \\ &= \left(\frac{A_2 + B_2}{2} - C_2 \right) P_2(\sin \beta_2) + \frac{1}{4}(B_2 - A_2) P_2^2(\sin \beta_2) \cos \lambda_2 \end{aligned} \quad (376)$$

したがって,

$$\begin{aligned} U &= \frac{k^2 M_1 M_2}{r} \\ &+ \underbrace{\frac{k^2 M_1}{r^3} \left[\left(\frac{A_1 + B_1}{2} - C_1 \right) P_1(\sin \beta_1) + \frac{1}{4}(B_1 - A_1) P_2^2(\sin \beta_1) \cos 2\lambda_1 \right]}_{[1]} \\ &+ \underbrace{\frac{k^2 M_2}{r^3} \left[\left(\frac{A_2 + B_2}{2} - C_2 \right) P_1(\sin \beta_2) + \frac{1}{4}(B_2 - A_2) P_2^2(\sin \beta_2) \cos 2\lambda_2 \right]}_{[2]} \end{aligned} \quad (377)$$

相対運動

$$\vec{r} = \vec{R}_2 - \vec{R}_1 \quad (378)$$

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \vec{R}_1 - \vec{R}_2 = \frac{1}{M_2} \frac{\partial U}{\partial \vec{R}_1} - \frac{1}{M_1} \frac{\partial U}{\partial \vec{R}_2} \\ &= \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \left\{ \frac{k^2 M_1}{r} + \frac{k^2}{r^3} [1] + \frac{k^2 M_1}{r^3 M_1} [2] + \frac{k^2 M_2}{r} + \frac{k^2}{r^3} [2] + \frac{k^2 M_2}{r^3 M_1} [1] \right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \left\{ \frac{k^2 (M_1 + M_2)}{r} + \frac{k^2 (M_1 + M_2)}{r M_1} [1] + \frac{k^2 (M_1 + M_2)}{r M_2} [2] \right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \left[\frac{M_1 + M_2}{M_1 M_2} U \right] \end{aligned} \quad (379)$$

ここで,

$$m = \frac{M_1 + M_2}{M_1 M_2}, \quad \mu = k^2 (M_1 + M_2) \quad (380)$$

とおくと,

$$m\vec{r} = \frac{\partial U}{\partial \vec{r}}, \quad U = \mu m \left\{ \frac{1}{r} + \frac{1}{rM_1}[1] + \frac{1}{rM_1}[2] \right\} + \mathcal{O}(3 \text{ 次}) \quad (381)$$

さて, 並進運動を分離すれば²⁷,

$$T = \frac{m}{2} \vec{r}^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 (A_j \omega_{A_j}^2 + B_j \omega_{B_j}^2 + C_j \omega_{C_j}^2) \quad (382)$$

運動方程式

$$\left. \begin{aligned} \dot{\vec{p}} &= \frac{\partial}{\partial \vec{r}}(U - T) & \dot{\vec{r}} &= -\frac{\partial}{\partial \vec{p}}(U - T) \\ \dot{p}_{\psi_j} &= \frac{\partial}{\partial \psi_j}(U - T) & \dot{\psi}_j &= -\frac{\partial}{\partial p_{\psi_j}}(U - T) \\ \dot{p}_{\theta_j} &= \frac{\partial}{\partial \theta_j}(U - T) & \dot{\theta}_j &= -\frac{\partial}{\partial p_{\theta_j}}(U - T) \\ \dot{p}_{\varphi_j} &= \frac{\partial}{\partial \varphi_j}(U - T) & \dot{\varphi}_j &= -\frac{\partial}{\partial p_{\varphi_j}}(U - T) \end{aligned} \right\} \quad j = 1, 2 \quad (383)$$

正準変換²⁸

$$(\vec{p}, \vec{r}) \rightarrow (\vec{L}, \vec{\ell}) \quad (\text{Delauney}) \quad (384)$$

$$(\vec{p}_{\psi_j}, \vec{\psi}_j) \rightarrow (\vec{L}_j, \vec{\ell}_j) \quad (\text{Andoyer}) \quad (385)$$

$$\left. \begin{aligned} -\frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{1}{r^2} p_\beta^2 + \frac{1}{r^2 \cos^2 \beta} p_\lambda^2 \right) + \frac{\mu m}{r} &= \frac{\mu m}{2a} = \frac{\mu^2 m^3}{2L^2} \\ \left(p_\beta^2 + \frac{p_\lambda^2}{\cos^2 \beta} \right)^{1/2} &= G \\ p_\lambda &= H \end{aligned} \right\} \quad (386)$$

$$\left. \begin{aligned} p_{\varphi_j} &= L_j \\ \left[p_{\theta_j}^2 + p_{\varphi_j}^2 + (p_{\psi_j} - p_{\varphi_j} \cos \theta_j)^2 \frac{1}{\sin^2 \theta_j} \right]^{1/2} &= G_j \\ p_{\psi_j} &= H_j \end{aligned} \right\} \quad j = 1, 2 \quad (387)$$

母関数

$$\begin{aligned} S &= S(r, \beta, \lambda, \vec{\psi}_1, \vec{\psi}_2, \vec{L}; \vec{L}_1, \vec{L}_2) \\ &= \sum_{j=1}^2 \left\{ L_j \varphi_j + H_j \psi_j - \int_{\theta_j^*}^{\theta} \left[G_j^2 - L_j^2 - \frac{1}{\sin^2 \theta_j} (H_j - L_j \cos \theta_j)^2 \right]^{1/2} d\theta_j \right. \\ &\quad \left. + H\lambda + \int_0^\beta \left[G^2 - \frac{H^2}{\cos^2 \beta} \right] d\beta + \int_{r_*}^r \left(-\frac{\mu^2 m^4}{L^2} + \frac{2\mu m^2}{r} - \frac{G^2}{r^2} \right) dr \right\} \end{aligned} \quad (388)$$

これより,

$$(\vec{\ell}, \vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2) = \frac{\partial S}{\partial (\vec{L}, \vec{L}_1, \vec{L}_2)} \quad (389)$$

²⁷ 回転エネルギーは乗っている座標系によらない.

²⁸ 普通 Delauney では $\frac{\mu m}{2a}$ を $m = 1$ の単位質量で定義するので, 次元に注意.

$$\ell = n(t - t_0), \quad g = \omega, \quad h = \Omega, \quad n^2 a^3 = \mu \quad (390)$$

運動方程式は,

$$\frac{d}{dt}(\vec{L}, \vec{L}_j) = \frac{\partial F}{\partial(\vec{\ell}, \vec{\ell}_j)}, \quad \frac{d}{dt}(\vec{\ell}, \vec{\ell}_j) = -\frac{\partial F}{\partial(\vec{L}, \vec{L}_j)} \quad (391)$$

$$F = \underbrace{\frac{\mu^2 m^3}{2L^2}}_{\text{Kepler}} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^2 \left[\underbrace{\left(\frac{1}{C_j} - \frac{1}{2A_j} - \frac{1}{2B_j} \right) L_j^2 + \left(\frac{1}{2A_j} + \frac{1}{2B_j} \right) G_j^2}_{\text{自転}} \right. \\ \left. + \underbrace{\left(\frac{1}{2B_j} - \frac{1}{2A_j} \right) (G_j^2 - L_j^2) \cos 2\ell_j}_{\text{非軸対称自転}} \right] \\ + \underbrace{\frac{\mu m}{r^3} \sum_{j=1}^2 \left[\frac{A_j + B_j - 2C_j}{2M_j} P_2(\sin \beta_j) + \frac{B_j - A_j}{4M_j} P_2^2(\sin \beta_j) \cos 2\lambda_j \right]}_{\text{摂動 (相互作用)}} \\ + \mathcal{O}(3 \text{ 次の調和項}) \quad (392)$$

ここで,

$$L = m\sqrt{\mu a}, \quad G = L\sqrt{1 - e^2}, \quad H = G \cos I \quad (393)$$

Order

$$\begin{array}{ccc} \text{Kepler} & \text{自転} & \text{摂動} \\ \sim 1 & \frac{M_j}{m} \left(\frac{R_j}{a} \right)^2 \left(\frac{\omega_j}{n} \right)^2 & \frac{2C_j - (A_j + B_j)}{C_j} \left(\frac{R_j}{a} \right)^2 \end{array}$$

4.4.1 M_2 の公転運動

$$\begin{array}{cc} \text{Kepler} & \text{摂動} \\ \sim 1 & \frac{2C_j - (A_j + B_j)}{C_j} \left(\frac{R_j}{a} \right)^2 \end{array}$$

- M_1 : 地球, M_2 : 人工衛星

$$\frac{2C_1 - (A_1 + B_1)}{C_1} \sim 10^{-3}, \quad \frac{R_1}{a} \sim 1 \quad \Rightarrow \quad 10^{-3} \text{ の摂動} \quad (394)$$

- M_1 : 地球, M_2 : 月

$$\frac{2C_1 - (A_1 + B_1)}{C_1} \sim 10^{-3}, \quad \frac{R_1}{a} \sim \frac{1}{60} \Rightarrow 10^{-7}(100\text{m}) \text{ の摂動} \quad (395)$$

$$\frac{2C_2 - (A_2 + B_2)}{C_2} \sim 10^{-4}, \quad \frac{R_2}{a} \sim \frac{1}{180} \Rightarrow 10^{-9}(1\text{m}) \text{ の摂動} \quad (396)$$

4.4.2 M_j の自転運動

$$\begin{array}{cc} \text{自転} & \text{摂動} \\ \frac{M_j}{m} \left(\frac{R_j}{a}\right)^2 \left(\frac{\omega_j}{n}\right)^2 & \frac{2C_j - (A_j + B_j)}{C_j} \left(\frac{R_j}{a}\right)^2 \end{array}$$

- M_1 : 地球, M_2 : 人工衛星
 M_1 の自転

$$\frac{m}{M_1} \sim 0 \quad (397)$$

M_2 の自転

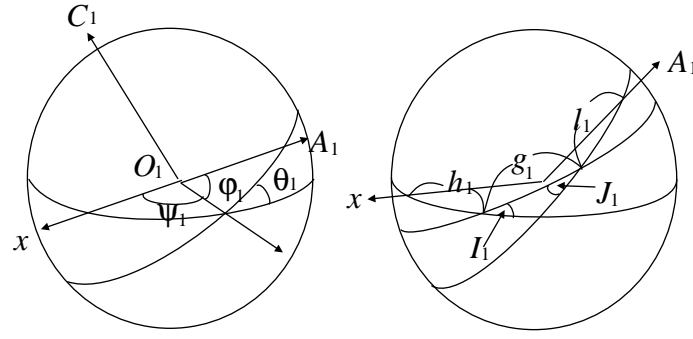
$$\frac{m}{M_2} \sim 1, \quad \frac{2C_1 - (A_1 - B_1)}{C_1} \sim 1, \quad \frac{\omega_1}{n} \sim \frac{1}{60} \Rightarrow 3 \times 10^4 \quad (398)$$

- M_1 : 地球, M_2 : 月
 M_1 の自転

$$\frac{1}{80} \times 10^{-3} \times \left(\frac{1}{30}\right)^2 \Rightarrow 10^{-8} \text{ 歳差運動} \quad (399)$$

M_2 の自転

$$1 \times 10^{-4} \times 1 \Rightarrow \text{Resonance を考慮しないとイケない} \quad (400)$$


 Figure 41: $\psi_1, \theta_1, \varphi_1, h_1, g_1, \ell_1, I_1, J_1$

$$\overrightarrow{O_1A_1} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi_1 \cos \theta_1 \sin \psi_1 + \cos \varphi_1 \cos \psi_1 \\ \sin \varphi_1 \cos \theta_1 \cos \psi_1 + \cos \varphi_1 \sin \psi_1 \\ \cos \varphi_1 \sin \theta_1 \end{pmatrix} \quad (401)$$

$$\overrightarrow{O_1B_1} = \begin{pmatrix} -\cos \varphi_1 \cos \theta_1 \sin \psi_1 - \sin \varphi_1 \sin \psi_1 \\ \cos \varphi_1 \cos \theta_1 \cos \psi_1 - \sin \varphi_1 \cos \psi_1 \\ \sin \varphi_1 \sin \theta_1 \end{pmatrix} \quad (402)$$

$$\overrightarrow{O_1C_1} = \begin{pmatrix} \sin \theta_1 \sin \psi_1 \\ -\sin \theta_1 \cos \psi_1 \\ \cos \theta_1 \end{pmatrix} \quad (403)$$

さて,

$$\begin{aligned} \sin \theta_1 \sin \psi_1 &= \sin I_1 \cos J_1 \sin h_1 + \frac{1}{2}(1 + \cos I_1) \sin J_1 \sin(g_1 + h_1) \\ &\quad + \frac{1}{2}(1 - \cos I_1) \sin J_1 \sin(g_1 - h_1) \end{aligned} \quad (404)$$

$$\begin{aligned} \sin \theta_1 \cos \psi_1 &= \sin I_1 \cos J_1 \cos h_1 + \frac{1}{2}(1 + \cos I_1) \sin J_1 \cos(g_1 + h_1) \\ &\quad + \frac{1}{2}(1 - \cos I_1) \cos J_1 \sin(g_1 - h_1) \end{aligned} \quad (405)$$

$$\cos \theta_1 = \cos I_1 \cos J_1 - \sin I_1 \cos J_1 \cos g_1 \quad (406)$$

一方,

$$\overrightarrow{O_1O_2} = \vec{r} = (x, y, z) \quad (407)$$

$$\frac{x}{r} = \frac{1}{2}(1 - \cos I) \cos(f + g - h) + \frac{1}{2}(1 + \cos I) \cos(f + g + h) \quad (408)$$

$$\frac{y}{r} = -\frac{1}{2}(1 - \cos I) \sin(f + g - h) + \frac{1}{2}(1 + \cos I) \sin(f + g + h) \quad (409)$$

$$\frac{z}{r} = \sin I \sin(f + g) \quad (410)$$

λ, β は

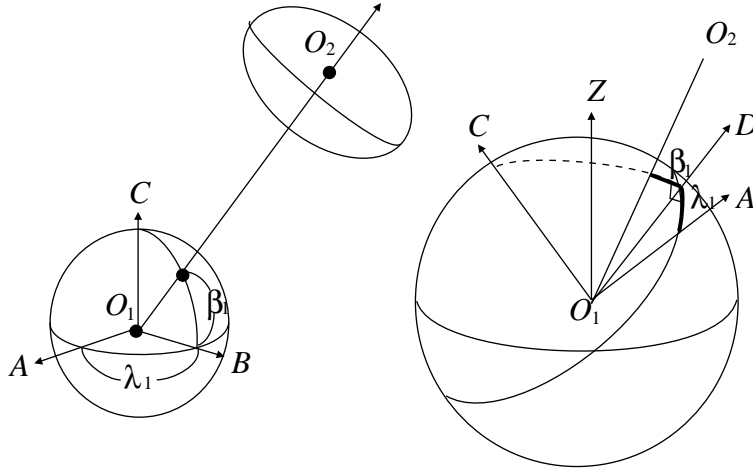


Figure 42: β, λ

$$\begin{aligned} \sin \beta_1 &= \sin I \sin I_1 \cos J_1 \sin(f + g) \\ &\quad - \sum_{\epsilon=\pm 1} \frac{1}{2} \sin I \sin I_1 \sin J_1 \sin(f + g + \epsilon g) \\ &\quad + \sum_{\epsilon, \delta=\pm 1} \frac{\epsilon \delta}{4} (1 + \epsilon \cos I)(1 - \delta \cos I_1) \sin J_1 \sin[f + g + \epsilon(h - h_1) + \epsilon \delta \ell_1] \\ \cos \beta_1 \cos \lambda_1 &= - \sum_{\epsilon=\pm 1} \frac{\epsilon}{2} \sin I \cos I_1 \sin J_1 \cos(f + g + \epsilon \ell_1) \\ &\quad - \sum_{\epsilon, \delta=\pm 1} \sin I \sin I_1 (1 + \delta \cos J_1) \cos(f + g + \epsilon g_1 + \epsilon \delta \ell_1) \\ &\quad + \sum_{\epsilon, \delta} \frac{\delta}{4} (1 + \epsilon \cos I) \sin I_1 \sin J_1 \cos[f + g + \epsilon(h - h_1) + \epsilon \delta \ell_1] \\ &\quad + \sum_{\epsilon, \delta, \gamma} \frac{1}{8} (1 + \epsilon \cos I)(1 - \delta \cos I_1)(1 + \gamma \cos J_1) \\ &\quad \times \cos[f + g + \epsilon(h - h_1) + \epsilon \delta g_1 + \epsilon \delta \gamma \ell_1] \end{aligned} \quad (412)$$

D'Alembert の性質

- $I_1 = 0$ で
 - g_1, h_1 は意味がない
 - $g_1 + h_1$ は意味がある

- λ_1, β_1 は $I_1 = 0$ でも存在し確定するから g_1 だけの term は必ず $I_1 = 0$ の時には消える.

$$\cos \beta_1 \sin \lambda_1 = \cos \beta_1 \cos \left(\lambda_1 + \frac{\pi}{2} \right) \equiv \cos \beta_1 \cos \lambda \Big|_{\ell_1 \rightarrow \ell_1 + \frac{\pi}{2}} \quad (413)$$

ここで $\ell_1 + \lambda_1$ だけが意味がある.

ルジャンドルの計算

$$P_n^m(\sin \beta) \exp[im\lambda] \equiv P_n^{(m)}(\sin \beta) \cos^m \beta \exp[im\lambda] \quad (414)$$

すると,

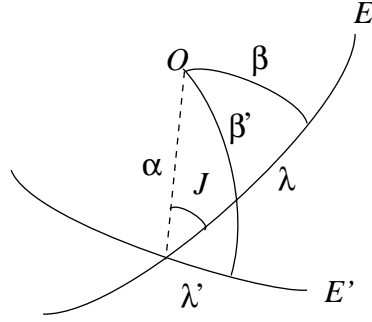


Figure 43: $\alpha, \beta, \lambda, \beta', \gamma'$

$$\cos \alpha = \cos \beta \cos \lambda = \cos \beta' \cos \lambda' \quad (415)$$

$$\sin \alpha \cos J_1 = \cos \beta \sin \lambda \quad (416)$$

$$\sin \alpha \cos(I + J) = \cos \beta' \sin \lambda' \quad (417)$$

$$\sin \alpha = \frac{\sin \beta'}{\sin(I + J)} = \frac{\sin \beta}{\sin J} \quad (418)$$

これより I, J を消去すると,

$$\begin{aligned} \cos \beta \sin \lambda &= \sin \alpha \cos(J + I - I) \\ &= \sin \alpha \sin(J + I) \sin I + \sin \alpha \cos(I + J) \cos I \\ &= \cos \beta' \sin \lambda' \cos I + \sin \beta' \sin I \end{aligned} \quad (419)$$

$$\begin{aligned} \sin \beta &= \sin \alpha \sin(J + I - I) \\ &= \sin \alpha \sin(J + I) \cos I - \sin \alpha \cos(I + J) \sin I \\ &= \sin \beta' \cos I - \cos \beta' \sin \lambda' \sin I \end{aligned} \quad (420)$$

$$\cos \beta \exp[i\lambda] = \cos \beta' \sin \lambda' + i [\sin I \sin \beta' + \cos I \cos \beta' \sin \lambda'] \quad (421)$$

$$\cos \beta \exp[im\lambda] = [\sin I \sin \beta' + \cos I \cos \beta' \sin \lambda']^m \quad (422)$$

$$\begin{aligned} P_n^m(\sin \beta) \exp[im\lambda] &= [\sin I \sin \beta' + \cos I \cos \beta' \sin \lambda']^m \\ &\quad \times P_n^{(m)}(\sin \beta) (\sin \beta \cos I - \cos \beta' \sin \lambda' \sin I) \end{aligned} \quad (423)$$

さて, $Y_{\ell m}$ の加法定理から,

$$P_n^m(\sin \beta) e^{im(\lambda + \frac{\pi}{2})} = \sum_{j=0}^m \sum_{\epsilon=\pm 1} K_j^{nm}(I, \epsilon) P_n^j(\sin \beta') e^{ij(\epsilon\lambda + \frac{\pi}{n})} \quad (424)$$

と線形結合で書ける. ここで,

$$K_{n-2p}^{nm}(I, \epsilon) = (-1)^{\lfloor \frac{n-m}{2} \rfloor} \frac{(2p)!!}{(2n-2p-1)!!} F_{nmp}(\epsilon \sin I, \epsilon \cos I) \quad (425)$$

$$K_{n-2p-1}^{nm}(I, \epsilon) = (-1)^{\lfloor \frac{n-m}{2} \rfloor} \frac{2(2p)!!}{(2n-2p-1)!!} \frac{d}{dI} \sum_{k=0}^p \epsilon F_{nmk}(\epsilon \sin I, \epsilon \cos I) \quad (426)$$

ここで F_{nmk} は Izsak の多項式. これは回転の表現と密接に結び付いている.

n	m	k	K_k^{nm}
2	0	0	$1 - \frac{3}{2} \sin^2 I$
2	0	1	$\frac{\epsilon}{2} \sin I \cos I$
2	0	2	$\frac{1}{8} \sin^2 I$
2	1	0	$-3 \sin I \cos I$
2	1	1	$-\frac{\epsilon}{2}(1 + \epsilon \cos I)(1 - 2\epsilon \cos I)$
2	1	2	$\frac{\epsilon}{4} \sin I(1 + \epsilon \cos I)$
2	2	0	$3 \sin^2 I$
2	2	1	$-\sin I(1 + \epsilon \cos I)$
2	2	2	$\frac{1}{4}(1 + \epsilon \cos I)^2$

Table 2: Izsak の多項式

1. $E : M_1$ 赤道面 β_1, γ_1
 $E' : G_1$ 赤道面 B_1, Γ_1

$$P_n^m(\sin \beta_1) e^{im(\lambda_1 + \lambda_1 + \frac{\pi}{2})} = \sum_{k=0}^n \sum_{\gamma=\pm 1} K_k^{nm}(J_1, \gamma) P_k^m(\sin B_1) e^{ik(\gamma\Lambda_2 + \frac{\pi}{2})} \quad (427)$$

$\gamma = \pm 1$ より,

$$e^{ik(\gamma\Lambda_2 + \frac{\pi}{2})} = \gamma^{-k} e^{ik\gamma(\Lambda_1 + \frac{\pi}{2})} \quad (428)$$

2. $E : G_1$ 赤道面 B_1, Γ_1
 $E' : \text{基準面 } B, \Gamma$

$$P_n^m(\sin B_1) e^{ik\gamma(\Lambda_1 + g_1 + \frac{\pi}{2})} = \sum_{p=0}^k \sum_{\delta=\pm 1} K_p^{nk}(I_1, \delta) P_n^p(\sin B) \underbrace{e^{ip\gamma(\delta\Lambda + \frac{\pi}{2})}}_{\equiv \delta^{-p} e^{ip\gamma\delta(\Lambda + \frac{\pi}{2})}} \quad (429)$$

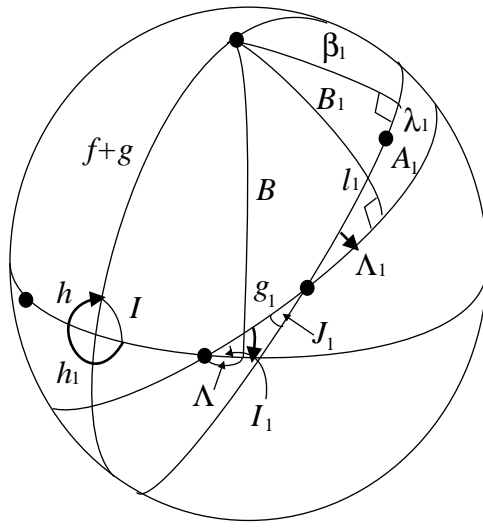


Figure 44: 赤道面，基準面，軌道面の対応

3. E : 基準面 B, Λ

E' : 軌道面 $O, f + g$

$$P_n^p(\sin B)e^{ip\gamma\delta(\Lambda+(h_1-h)+\frac{\pi}{2})} = \sum_{q=0}^p \sum_{\epsilon=\pm 1} K_q^{np}(-I, \epsilon) P_n^q(0) e^{iq\gamma\delta[\epsilon(f+g)+\frac{\pi}{2}]} \quad (430)$$

$f + g$ の向きを変えれば $2\pi - I$ だけ回転した事になる。

4. まとめ

$$\begin{aligned} P_n^m(\sin \beta_1) e^{im\lambda_1} &= e^{-im(\ell_1 + \frac{\pi}{2})} \\ &\times \sum_{k=0}^n \sum_{\gamma=\pm 1} K_k^{nm}(J_1, \gamma) \gamma^k e^{-ik\gamma_1 g_1} \\ &\times \sum_{p=0}^n \sum_{\delta=\pm 1} K_p^{nk}(I_1, \delta) \delta^{-p} e^{-ip\gamma\delta(\overline{h_1-h})} \\ &\times \sum_{q=0}^n \sum_{\epsilon=\pm 1} K_q^{np}(-I, \epsilon) P_n^q(0) e^{iq\gamma\delta[\epsilon(f+g)+\frac{\pi}{2}]} \\ &= \sum_{p,q,r=0}^n \sum_{\gamma,\delta,\epsilon=\pm 1} \gamma^{r-p} \delta^{r-q} K_p^{nm}(J_1, \gamma) K_q^{np}(I_1, \delta) K_r^{nq}(-I, \epsilon) \\ &\times \exp \left\{ -i \left[m \left(\ell + \frac{\pi}{2} \right) + p\gamma g_1 q\gamma\delta(h_1 - h) - r \left(\gamma\delta\epsilon \overline{f+g} + \frac{\pi}{2} \right) \right] \right\} \end{aligned} \quad (431)$$

ここで,

$$P_n^m(0) = \begin{cases} 0 & n - m = \text{odd} \\ (-1)^{\lfloor \frac{n+m}{2} \rfloor} \frac{(n+m-1)!!}{(n-m)!!} & n - m = \text{even} \end{cases} \quad (432)$$

$$p = 0 \quad \rightarrow \quad \gamma = 1 \quad (433)$$

$$q = 0 \quad \rightarrow \quad \gamma\delta = 1 \quad (434)$$

$$P_n^m(\sin \beta_1) e^{im\lambda_1}$$

λ_1, β_1 は $-\vec{r} = \overrightarrow{O_2O_1}$ の経緯度だから,

$$g \rightarrow g + \pi \Rightarrow = (\quad)|_{1 \leftrightarrow 2} \times \underbrace{e^{-i(-r\gamma\delta\epsilon)\pi}}_{=(-1)^r} \quad (435)$$

よって,

$$P_n^m(\quad) e^{im\lambda_1} = P_n^m(\sin \beta_1) e^{im\lambda_1} \Big|_{1 \leftrightarrow 2} \times (-1)^r \quad (436)$$

例:

$$\begin{aligned} P_2(\sin \beta_1) &= P_2(\cos J_1) \left[-\frac{1}{2} + \frac{3}{8}(1 + \cos^2 I + \cos^2 I_1 - 3 \cos^2 I \cos I_1) \right. \\ &\quad - \frac{3}{8} \sin 2I \sin 2I_1 \cos(h_1 - h) - \frac{3}{8} \sin^2 I \sin^2 I_1 \cos 2(h_1 - h) \\ &\quad \left. + \frac{3}{8} \sin^2 I (1 - 3 \cos^2 I_1) \cos(2f + 2g) + \dots \right] \\ &\quad - \frac{3}{16} (1 - 3 \cos^2 I) \sin 2I_1 \sin 2J_1 \cos g_1 \\ &\quad + \frac{3}{16} (1 - 3 \cos^2 I) \sin^2 I_1 \sin^2 J_1 \cos 2g_1 + \dots (39 \text{ 項}) \end{aligned} \quad (437)$$

$$\begin{aligned} P_2^2(\sin \beta_1) \cos 2\lambda_1 &= \frac{3}{8} (1 - 3 \cos^2 I) (1 - 3 \cos^2 I_1) \sin^2 J_1 \cos 2\ell_1 \\ &\quad + \sum_{\epsilon=\pm 1} \frac{9}{16} \sin 2I \sin 2I_1 \sin^2 J_1 \cos(h - h_1 + \epsilon 2\ell_1) \\ &\quad + \sum \frac{9}{16} \sin^2 I \sin^2 I_1 \sin^2 J_1 \cos(2h - 2h_1 + \epsilon 2\ell_1) \\ &\quad - \sum \frac{9}{16} \sin^2 I (1 - 3 \cos^2 I_1) \sin^2 J_1 \cos(2f + 2g + \epsilon 2\ell_1) \\ &\quad - \sum \frac{\epsilon 3}{8} (1 - \cos^2 I) \sin 2I_1 \sin J_1 (1 + \epsilon \cos J_1) \cos(g_1 + \epsilon 2\ell_1) \\ &\quad + \dots (67 \text{ 項}) \end{aligned} \quad (438)$$

4.6 地球の自転運動

M_1 : 地球, $A_1 = B_1 < C_1$

M_2 : 月, $A_2 = B_2 = C_2$

地球の形状の影響による月の公転運動への影響

$$1 : \frac{2C_1 - 2A_1}{C_1} \left(\frac{R_1}{a} \right)^2 \sim 1 : 5 \times 10^{-6} \quad (439)$$

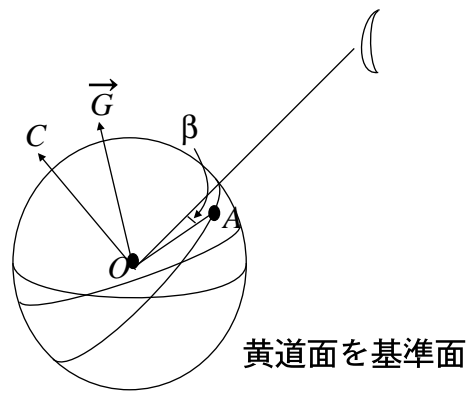


Figure 45: 黄道面を基準面

よって、これは無視する。しかし太陽の影響は無視できない。Poincaré の定理²⁹ により長年変化は g, h にのみおきる（平均運動を考慮する）。運動方程式

$$\frac{d}{dt}(L_1, G_1, H_1, K) = \frac{\partial F}{\partial(\ell_1, g_1, h_1, k)}, \quad \frac{d}{dt}(\ell_1, g_1, h_1, k) = -\frac{\partial F}{\partial(L_1, G_1, H_1, K)} \quad (440)$$

$$F = \underbrace{-K - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{C_1} - \frac{1}{A_1} \right) L_1^2 + \frac{1}{A_1} G_1^2 \right]}_{F_0} - \underbrace{\frac{\mu m C_1 - A_1}{r^3 M_1} P_2(\sin \beta_1)}_{F_1} \quad (441)$$

β, r を介して月の運動は入ってくるので $\beta = \beta(t), r = r(t)$ となり、 F が t に explicit になる。これを避けるため、 $k = t$ とおき、 F が t に explicit に依存しないように形式的に (k, K) をとる。ここで K は月のエネルギー。

正準変換

$$L_1, G_1, H_1, K; \ell_1, g_1, h_1, k \rightarrow L'_1, G'_1, H'_1, K'; \ell'_1, g'_1, h'_1, k' \quad (442)$$

母関数

$$S_1 = S_1(L'_1, G'_1, H'_1, K'; \ell'_1, g'_1, h'_1, k') \quad (443)$$

$$(L_1, G_1, H_1, K) = (L'_1, G'_1, H'_1, K') + \{(L'_1, G'_1, H'_1, K'), S_1\} + 2 \text{次} \quad (444)$$

$$(\ell_1, g_1, h_1, k) = (\ell'_1, g'_1, h'_1, k') + \{(\ell'_1, g'_1, h'_1, k'), S_1\} + 2 \text{次} \quad (445)$$

S_1 は K' を含まないから $k = k'$ 。

補助方程式

$$\frac{d}{d\tau}(\vec{L}'_1, K') = \frac{\partial F_0^*}{\partial(\vec{\ell}'_1, k')}, \quad \frac{d}{d\tau}(\vec{\ell}'_1, k') = -\frac{\partial F_0^*}{\partial(\vec{L}'_1, K')} \quad (446)$$

$$F_0^* = -K - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{C_1} - \frac{1}{A_1} \right) L_1^2 + \frac{1}{A_1} G_1^2 \right]$$

²⁹ 惑星の長年変化についての定理。

ここで $F_0^* = F_0|_{L \rightarrow L'}$. この解は,

$$L'_1, G'_1, H'_1, h'_1 = \text{const.} \quad (\text{in } \tau) \quad (447)$$

$$\ell'_1 = n_1 \tau + \text{const.} \quad n_1 = \left(\frac{1}{C_1} - \frac{1}{A_1} \right) L_{10} \quad (448)$$

$$g'_1 = \omega_1 \tau + \text{const.} \quad \omega_1 = \frac{1}{A_1} G'_{10} \quad (449)$$

月の運動は given とすると ($t \rightarrow k'$ として t に implicit としておく),

$$\ell = nk' + \ell_0 \quad n \Rightarrow \text{近点月} \quad (450)$$

$$g = n_g k' + g_0 \quad n_g \Rightarrow \sim 10\text{y} \quad (451)$$

$$h = h_h k' + h_0 \quad n_h \Rightarrow 18.6\text{y} \quad (452)$$

$$\frac{n_1}{\omega_1} = -\frac{C_1 - A_1}{C_1} \underbrace{\frac{L'_1}{G'_1}}_{\cos J'_1} \sim \frac{1}{30} \quad (453)$$

$$J'_1 \sim 0.''2 \quad \text{地球} \quad (454)$$

ここで, ω_1 は1極星日周期. 実際は, 剛体でないので n_1 の周期 (極運動) はほぼ420日 (Chandler 周期). さて,

$$F_1 = -\frac{\mu m}{r^2} \frac{C_1 - A_1}{M_1} P_1(\sin \beta_1) \quad (455)$$

今の場合,

$$\begin{aligned} h - h_1 & 18.6\text{y} \\ 2f + 2g & \text{半月} \\ g_1 & 1 \text{日} \\ 2g_1 & \text{半日} \end{aligned} \quad (456)$$

摂動

$$-\frac{dS_1}{dt} + F_1(L'_1, G'_1, H'_1, \ell'_1, g'_1, h, t_1, k') = F_1^* \quad (457)$$

$$\begin{aligned} F_1^* = \langle F_1 \rangle_\tau &= -\frac{\mu m}{a^3(1-e^2)^{3/2}} \frac{C_1 - A_1}{M_1} P_2(\cos J'_1) \\ &\times \left[-\frac{1}{2} + \frac{3}{8}(1 + \cos^2 I + \cos^2 I'_1 - 3 \cos^2 I \cos^2 I'_1) \right] \end{aligned} \quad (458)$$

$$\begin{aligned} S_1 &= \int d\tau (F_1 - \langle F_1 \rangle) \\ &= \frac{\mu m}{a^3(1-e^2)^{3/2}} \frac{C_1 - A_1}{M_1} P_2(\cos J'_1) \left[\frac{3}{8} \sin 2I \sin 2I'_1 \frac{1}{n_h} \sin(h - h'_1) \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{8} \sin^2 I \sin^2 I'_1 \frac{1}{2n_h} \sin 2(h - h'_1) \right] + \dots \end{aligned} \quad (459)$$

解

$$L'_1, G'_1, H'_1, K' = \text{const.} \quad \text{int} \quad (460)$$

$$\ell'_1 = \left(n_1 + \frac{\partial F_1^*}{\partial L'_1} \right) t + \text{const.} \quad (461)$$

$$g'_1 = \left(\omega_1 + \frac{\partial F_1^*}{\partial G'_1} \right) t + \text{const.} \quad (462)$$

$$h'_1 = -\frac{\partial F_1^*}{\partial H'_1} t + \text{const.} \quad \Leftarrow \text{摂動によってゆっくり変わる} \quad (463)$$

$$k' = t + \text{const.} \quad (464)$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial F_1^*}{\partial H'_1} &= \frac{\mu m}{a^3(1-e^2)^{3/2}} \frac{C_1 - A_1}{M_1} \frac{1}{G'_1} P_2(\cos J'_1) \frac{3}{4} \cos I'_1 (1 - 3 \cos^2 I) \\ &= n \cdot \frac{n}{\omega_1} \frac{M_2}{M_1 + M_2} \frac{C_1 - A_1}{A_1} P_2(\cos J'_1) \cos I'_1 (1 - 3 \cos^2 I) \frac{1}{1 - e} \end{aligned} \quad (465)$$

$$\begin{aligned} \left(-\frac{\partial F_1^*}{\partial H'_1} \right) / \omega_1 &= \left(\frac{1}{27.6} \right)^2 \frac{1}{81} \frac{1}{303} \frac{3}{4} \cos 23.27 (1 - 3 \cos^2 5.6) \frac{1}{1 - 0.05} \\ &= -0.728 \times 10^{-6} \end{aligned} \quad (466)$$

$$\omega_1 = 4''74 \times 10^8 / y \Rightarrow -\frac{\partial F_1^*}{\partial H'_1} = -34''5 / y \quad (467)$$

total での ω_1 は,

$$\omega_1 \sim -50''2 / y \quad (468)$$

これは luni-solar precession constant (月-太陽歳差定数) と呼ばれる。

$$\begin{aligned} S_1 &= \text{int}(F_1 - \langle F_1 \rangle) d\tau \\ &= \mu m \frac{C_1 - A_1}{M_1 a^3} \left\{ P_2(\cos J_1) \left[\frac{3}{8} \sin 2I \sin 2I_1 \frac{\sin(h - h'_1)}{n_h} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{3}{8} \sin^2 I \sin^2 I_1 \frac{\sin 2(h - h'_1)}{2n_h} - \frac{3}{8} \sin^2 I (1 - 3 \cos^2 I_1) \frac{\sin(2\ell + 2g')}{n + n_h} + \dots \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{16} (1 - 3 \cos^2 I) \sin 2I_1 \sin 2J_1 \frac{\sin g'_1}{\omega_1} - \frac{3}{16} (1 - 3 \cos^2 I) \sin^2 I_1 \sin^2 J_1 \frac{\sin 2g'_1}{2\omega_1} + \dots \right\} \end{aligned} \quad (469)$$

ここで $e = 0$ とする。

章動 (Nutation)

$$\begin{aligned} h_1 &= h'_1 + \{h'_1, S_1\} = h'_1 - \frac{\partial S_1}{\partial H'_1} = h'_1 - \frac{1}{G'_1} \frac{\partial S_1}{\partial(\cos I_1)} \\ &= h'_1 + \mu m \frac{C_1 - A_1}{M_1 a^3 G'_1} P_2(\cos J_1) \left[\frac{3}{4} \sin 2I \frac{\cos 2I_1}{\sin I_1} \underbrace{\frac{\sin(h - h'_1)}{n_h}}_{18.6/y} \right] \end{aligned}$$

$$+\frac{3}{4}\sin^2 I \cos I_1 \underbrace{\frac{\sin 2(h-h'_1)}{2n_h}}_{9.3/y} - \frac{3}{4}\sin^2 I_3 \cos I_1 \underbrace{\frac{\sin 2(\ell+g)}{2n+2n_g}}_{\text{半月}} \quad (470)$$

ここで $h = 18.6y, h_1 = 21000y$. さて,

$$\begin{aligned} \mu m \frac{C_1 - A_1}{M_1 a^3 G'_1} &= \frac{n}{\omega_1} \frac{M_2}{M_1 + M_2} \frac{C_1 - A_1}{A_1} n \\ &= \left(\frac{1}{27.6}\right) \left(\frac{1}{81}\right) \left(\frac{1}{303}\right) n \end{aligned} \quad (471)$$

最大振幅はこれに,

$$\frac{3}{4} \sin 10.18' \frac{\cos 46.54' 18.6y}{\sin 23.27' 27.6d} \quad (472)$$

をかけたもので,

$$8.38 \times 10^{-5} \text{rad} \sim 17''3 \quad (473)$$

これは periodic で最大のもの. ここで ω_1 は 1 極星日, n は 1 近点月.

$$\begin{aligned} I_{1,\text{osc}} &= I_1 + \{I_1, S_1\} = I_1 - \frac{1}{\sin I_1} \left(\frac{1}{G'_1} \frac{\partial S_1}{\partial h'_1} - \frac{\cos I_1}{G'_1} \frac{\partial S_1}{\partial g'_1} \right) \\ &= I_1 - \mu m \frac{C_1 - A_1}{M_1 a^3 G'_1 \sin I_1} P_2(\cos J_1) \\ &\quad \times \left[-\frac{3}{8} \sin 2I \sin 2I_1 \frac{\cos(h-h')}{n_h} - \frac{3}{4} \sin^2 I \sin^2 I_1 \frac{\cos 2(h-h'_1)}{n_h} \right] \end{aligned} \quad (474)$$

最大振幅は,

$$\mu m \frac{C_1 - A_1}{M_1 a^3 G'_1 \sin I_1} \frac{3}{4} \sin 2I \cos I_1 \frac{1}{n_h} \cong 9''2 \quad (475)$$

注: J_1 は小さな量なので ℓ, g で S_1 を偏微分する時には気をつけなければならない.

4.7 水星の自転運動

Resonance の例. 公転 $n = 88$ 日, 自転 $\omega = 59$ 日 $\rightarrow 3:2$. いま, 公転面は自転面に一致すると仮定する. 太陽は球対称.

$$I_2 = J_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad L_2 = G_2 = H_2, \quad \beta_2 = 0 \quad (476)$$

ハミルトニアンは,

$$\begin{aligned} F &= \frac{\mu^2 m^3}{2L^2} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{C_2} - \frac{1}{2A_2} - \frac{1}{2B_2} \right) L_2^2 + \left(\frac{1}{2A_2} + \frac{1}{2B_2} \right) G_2^2 + \left(\frac{1}{2B_2} - \frac{1}{2A_2} \right) \underbrace{(G_2^2 - L_2^2)}_{=0} \cos 2\ell_2 \right] \\ &\quad + \frac{\mu m}{r^3} \left[\frac{A_2 + B_2 - 2C_2}{M_2} P_2(\sin \beta_2) + \frac{B_2 - A_2}{4M_2} P_2^2(\sin \beta_2) \cos 2\lambda_2 \right] + \mathcal{O}(3 \text{次}) \end{aligned} \quad (477)$$

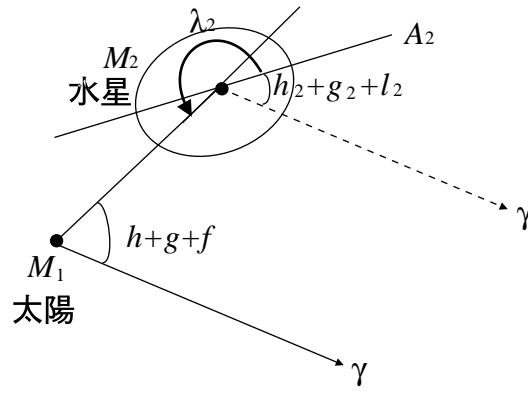


Figure 46: 水星の 3:2 共鳴

ここで,

$$P_n^m(0) = \begin{cases} 0 & n - m : \text{odd} \\ (-1)^{\lfloor \frac{n-m}{2} \rfloor} \frac{(n+1-m)!!}{(n+m)!!} & n - m : \text{even} \end{cases} \quad (478)$$

より,

$$F = \frac{\mu^2 m^3}{2L^2} - \frac{G_2^2}{C_2} + \frac{\mu m}{r^3} \left[\frac{A_2 + B_2 - 2C_2}{4M_2} + \frac{3(B_2 - A_2)}{4M_2} \cos 2\lambda_2 \right] + (3 \text{ 次}) \quad (479)$$

今,

$$\lambda_2 = \pi + (h + g + f) - (h_2 + g_2 + \ell_2) \quad (480)$$

独立変数のうち, $L_2 = G_2 = H_2$ より $\ell_2 + g_2 + h_2$ だけに意味がある. 正準変数として,

$$\begin{pmatrix} L_2 & \ell_2 \\ G_2 & g_2 \\ H_2 & h_2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} X & x = \ell_2 + g_2 + h_2 \\ Y & y = g_2 + h_2 \\ Z & z = h_2 \end{pmatrix} \quad (481)$$

ととる. 正準変数は $pdq = \text{const.}$ より,

$$L_2 d\ell_2 + G_2 dg_2 + H_2 dh_2 = X d(\ell_2 + g_2 + h_2) + Y d(g_2 + h_2) + Z dh_2 \quad (482)$$

よって,

$$X = L_2, \quad Y = G_2 - L_2, \quad Z = H_2 - G_2 \quad (483)$$

すると,

$$\lambda_2 = h + g + f + \pi - x \quad (484)$$

運動方程式：

$$\frac{dX}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \frac{dx}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial X} \quad (485)$$

$$F = \frac{\mu^2 m^3}{2L^2} - \frac{1}{2} \frac{(X+Y)^2}{C_2} + \frac{\mu m}{r^3} \left[\frac{2C_2 - A_2 - B_2}{4M_2} + \frac{3(B_2 - A_2)}{4M_2} \cos 2(h+g+f-x) \right] \quad (486)$$

今、水星の公転は Kepler としている。よって r, h, g, f はそれをいれなければならない。

$$\frac{a^3}{r^3} \cos(2f+2\alpha) = \sum_j C_j(e) \cos(j\ell+2\alpha) \quad (487)$$

今、

$$n_x : n_\ell \sim 2 : 3 \quad (488)$$

なので、 $3\ell - 2x$ を積分する時に critical term (small divisor) (→長年項) が出てくる。また t をあらわに含むので、 $K, k(=t)$ を導入しなければならない。

長年摂動の運動方程式：

$$\begin{pmatrix} X & x \\ K & k \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} X' & x' \\ K' & k' \end{pmatrix} \quad \text{by } S_1(X', x', k') \quad (489)$$

$$\frac{d}{dt}(X, K) = \frac{\partial F}{\partial(x, k)}, \quad \frac{d}{dt}(x, k) = -\frac{\partial F}{\partial(X, K)} \quad (490)$$

$$F = -K - \frac{1}{2} \frac{(X+Y)^2}{C_2} + \frac{\mu m}{r^3} [t \rightarrow k] \quad (491)$$

新運動方程式：

$$\frac{d}{dt}(X', K') = \frac{\partial F^*}{\partial(x', k')}, \quad \frac{d}{dt}(x', k') = -\frac{\partial F^*}{\partial(X', K')} \quad (492)$$

$$F^* = -K' - \frac{1}{2} \frac{(X'+Y)^2}{4M_2} + \frac{\mu m}{a^3} \left[\frac{2C_2 - A_2 - B_2}{4M_2} \frac{1}{(1-e^2)^{3/2}} + \frac{3(B_2 - A_2)}{4M_2} \left(\frac{7}{2}e - \frac{123}{16}e^3 \right) \cos(\underbrace{3\ell + 2\varpi - 2x}_{\text{critical term ; } \sigma}) \right] \quad (493)$$

ここで $\ell = nk' + \text{const.}$

平衡解：

$$\frac{d\sigma}{dt} = 3n - 2\frac{dx'}{dt} = 3n + 2\frac{\partial F^*}{\partial X'} = 3n - 2\frac{X'+Y}{C_2} = 0 \quad (494)$$

$$\frac{dX'}{dt} = \frac{\partial F^*}{\partial x'} = \frac{\mu m}{a^3} \frac{3(B_2 - A_2)}{2M_2} \left(\frac{7}{2}e - \frac{123}{16}e^3 \right) \sin \sigma = 0 \quad (495)$$

これより,

$$\sigma = 0 \text{ or } \pi = \text{const.}, \quad 3n - 2\omega = 0 \quad \left(\omega = \frac{X' + Y}{C_2} \right) \quad (496)$$

自転と公転をいれた運動方程式:

今度は公転も同時に解く.

$$\frac{d}{dt}(L, G, H, X, Y, Z) = \frac{\partial F}{\partial(\ell, g, h, x, y, z)}, \quad \frac{d}{dt}(\ell, g, h, x, y, z) = -\frac{\partial F}{\partial(L, G, H, X, Y, Z)} \quad (497)$$

すく,

$$\frac{d}{dt}(L', G', H', X') = \frac{\partial F^*}{\partial(\ell', g', h', x')}, \quad \frac{d}{dt}(\ell', g', h', x') = -\frac{\partial F^*}{\partial(L', G', H', X')} \quad (498)$$

$$F^* = \frac{\mu^2 m^3}{2L'^2} - \frac{1}{2} \frac{(X' + Y)^2}{C_2} + \frac{\mu m}{a^3} \\ \times \left[\frac{2C_2 - A_2 - B_2}{4M_2} \frac{1}{(1 - e^2)^{3/3}} + \frac{3(B_2 - A_2)}{4M_2} \left(\frac{7}{2}e - \frac{123}{16}e^3 \right) \cos(\underbrace{3\ell' + 2g' + 2k'2x'}_{=\sigma}) \right] \quad (499)$$

ここで,

$$L' = m\sqrt{\mu a} \Rightarrow a = \frac{L'^2}{\mu m^2}, \quad e = \sqrt{1 - \frac{G'^2}{L'^2}} \quad (500)$$

平衡解:

$$\frac{d\sigma}{dt} = -3\frac{\partial F^*}{\partial L'} - 2\frac{\partial F^*}{\partial G'} - 2\frac{\partial F^*}{\partial H'} + 2\frac{\partial F^*}{\partial X'} = 0 \quad (501)$$

$$L' = G' = H' = X' = \text{const.} \quad (502)$$

$$\frac{dX'}{dt} \propto \sin \sigma \Rightarrow \sigma = 0 \text{ or } \pi \quad (503)$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = 0 \Rightarrow 3n - 2\omega \pm \frac{B_2 - A_2}{M_2 R_2} n \left(\frac{R_2}{a} \right)^2 \frac{1}{e} \left(-\frac{21}{8} + \frac{4467}{64} e^2 \right) = 0 \quad (504)$$

最後の式は自転に関する量 ω と公転に関する量 n, e を結び付ける式. 最初の考察では

$$\frac{B_2 - A_2}{M_2 R_2} n \left(\frac{R_2}{a} \right)^2 \frac{1}{e} \left(-\frac{21}{8} + \frac{4467}{64} e^2 \right)$$

の term がない. もっとも $R_2/a \ll 1, B_2 - A_2 \ll A_2$ より, 当り前. ここで R_2 は水星の代表的大きさ. 訂正

$$\frac{d\sigma}{dt} = 0 \\ \Rightarrow 3n - 2\omega + \frac{2C_2 - A_2 - B_2}{M_2 R^2} n \left(\frac{R_2}{a} \right)^2 \left(\frac{15}{4} + \frac{51}{8} e^2 \right) \\ \pm \frac{B_2 - A_2}{M_2 R_2^2} n \left(\frac{R_2}{a} \right)^2 \left(-\frac{21}{8e} + \frac{4467}{64} e \right) = 0 \text{ for } \sigma = 0 \quad (505)$$

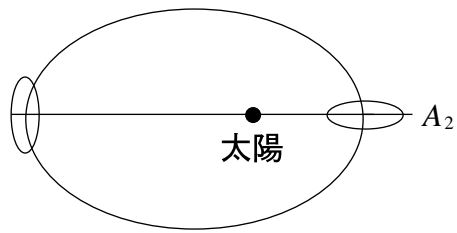


Figure 47: $\sigma = 0$. こっちの方が安定 (太陽に近い方で引っ張られているから).

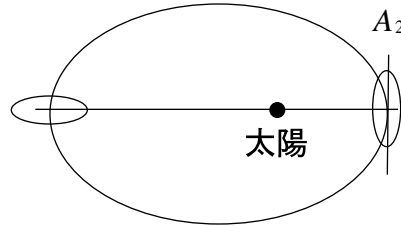


Figure 48: $\sigma = \pi$

さらに,

$$\frac{d\sigma}{dt} = 0 \Rightarrow -3\frac{\partial F^*}{\partial L} - 2\frac{\partial F^*}{\partial G} + 2\frac{\partial F^*}{\partial H} = 0 \quad (506)$$

これは A 軸が近点で同じ向きだということを表している. 実際は近点も動くので γ に対してはきちんとした比では動かない.

4.8 非剛体の効果

首振りをするとき A, B, C がふらつく. つまり, 対角化はすべての時間について行えない. よって E, F, G の effect を入れる.

$$A = A_0 + \Delta A, \quad B = B_0 + \Delta B, \quad C = C_0 + \Delta C, \quad D = \Delta D, \quad E = \Delta E, \quad F = \Delta F \quad (507)$$

仮定:

平均形状のまわりをゆっくりと微小振動するものとする.

$$A_0, B_0, C_0 \gg \Delta A(t), \Delta B(t), \Delta C(t), \Delta D(t), \Delta E(t), \Delta F(t) \quad (508)$$

$$1 \gg \Delta \dot{A}, \Delta \dot{B}, \Delta \dot{C}, \dot{D}, \dot{E}, \dot{F} \quad (509)$$

次,

$$\vec{v} = \vec{\omega}_2 \times \vec{r} \quad (510)$$

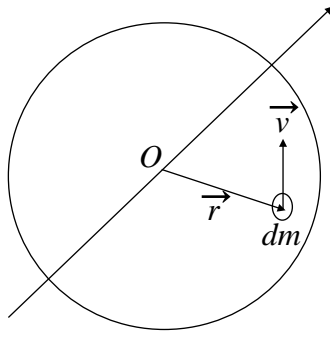


Figure 49: 角速度 $\vec{\omega}_0$

と仮定する. ここで $\vec{\omega}_0$ は A_0, B_0, C_0 で決まる角速度.

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{A} + \frac{1}{B} \right) G^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{2}{C} - \frac{1}{A} - \frac{1}{B} \right) L^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A} \right) (G^2 - L^2) \cos 2\ell \\
 &\quad + \frac{D}{BC} L \sqrt{G^2 - L^2} \cos \ell + \frac{E}{CA} L \sqrt{G^2 - L^2} \sin \ell + \frac{F}{2AB} (G^2 - L^2) \sin 2\ell \\
 &\quad + \mathcal{O}(2\text{次})
 \end{aligned} \tag{511}$$

$$F = -T + U + K \tag{512}$$

K において $\Delta A \sim F$ は given function of t .

$$\frac{d}{dt}(L, G, H, K) = \frac{\partial F}{\partial(\ell, g, h, k)}, \quad \frac{d}{dt}(\ell, g, h, k) = -\frac{\partial F}{\partial(L, G, H, K)} \tag{513}$$

order で分ける.

$$T = T_0 + T_1 \tag{514}$$

$$\begin{aligned}
 T_0 &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{A_0} + \frac{1}{B_0} \right) G^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{2}{C_0} - \frac{1}{A_0} - \frac{1}{B_0} \right) L^2 \\
 &\quad + \frac{1}{4} \left(\frac{1}{B_0} - \frac{1}{A_0} \right) (G^2 - L^2) \cos 2\ell
 \end{aligned} \tag{515}$$

$$\begin{aligned}
 T_1 &= -\frac{1}{4} \left(\frac{\Delta A}{A_0} + \frac{\Delta B}{B_0} \right) G^2 + \frac{1}{4} \left(-\frac{2\Delta C}{C_0} + \frac{\Delta A}{A_0} + \frac{\Delta B}{B_0} \right) L^2 \\
 &\quad + \frac{1}{4} \left(-\frac{\Delta B}{B_0} + \frac{\Delta A}{A_0} \right) (G^2 - L^2) \cos 2\ell + \frac{D}{B_0 C_0} L \sqrt{G^2 - L^2} \cos \ell \\
 &\quad + \frac{E}{C_0 A_0} L \sqrt{G^2 - L^2} \sin \ell + \frac{F}{2A_0 B_0} (G^2 - L^2) \sin 2\ell
 \end{aligned} \tag{516}$$

$$F = F_0 + F_1 \tag{517}$$

$$F_0 = -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{A_0} + \frac{1}{B_0} \right) G^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{2}{C_0} - \frac{1}{A_0} - \frac{1}{B_0} \right) L^2 - K \tag{518}$$

$$F_1 = \frac{1}{4} \left(\frac{1}{A_0} - \frac{1}{B_0} \right) (G^2 - L^2) \cos 2\ell - T_1 + U \tag{519}$$

$$(L, G, H, K; \ell, g, h, k) \rightarrow (L', G', H', K'; \ell', g', h', k')$$

補助方程式：

$$\frac{d}{d\tau}(L', G', H', K') = \frac{\partial F_0^*}{\partial(\ell', g', h', k')}, \quad \frac{d}{d\tau}(\ell', g', h', k') = -\frac{\partial F_0^*}{\partial(L', G', H', K')} \quad (520)$$

$$F_0^* = F_0(\vec{L}', \vec{\ell}_0) \quad (521)$$

$$L', G', H', K', h' = \text{const. for } \tau \quad (522)$$

$$\ell' = n_L \tau + \text{const.}, \quad n_L = \frac{1}{2} \left(\frac{2}{C_0} - \frac{1}{A_0} - \frac{1}{B_0} \right) L' \quad (523)$$

$$g' = n_G \tau + \text{const.}, \quad n_G = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{A_0} + \frac{1}{B_0} \right) G' \quad (524)$$

$$k' = \tau + \text{const.} \quad (525)$$

仮定：

さらに, D, E, F などほぼ n_L の周期で動くものとする. すると永年項が出てきそうなものは,

$$(*) = \frac{\overbrace{D}^{\text{周期 } n_L}}{B_0 C_0} L \sqrt{G^2 - L^2} \underbrace{\cos \ell}_{\text{周期 } n_L} + \frac{\overbrace{E}^{\text{周期 } n_L}}{C_0 A_0} L \sqrt{G^2 - L^2} \underbrace{\sin \ell}_{\text{周期 } n_L} \quad (526)$$

周期を ν として ($n_L \sim \nu$),

$$D = d \cos \nu k + d' \sin \nu k, \quad E = e \cos \nu k + e' \sin \nu k \quad (527)$$

とおくと, (*) は,

$$(*) \sim \frac{L \sqrt{G^2 - L^2}}{C_0} \left[\alpha \cos \left(\underbrace{\ell - \nu k \beta}_{\text{危険な項 } (n_L \sim \nu)} \right) + \dots \right] \quad (528)$$

$$\alpha^2 = \left(\frac{d}{2B_0} + \frac{e'}{2A_0} \right)^2 + \left(\frac{d'}{2B_0} + \frac{e}{2A_0} \right)^2 \quad (529)$$

そこで, 興味のある項だけ取り出して論じよう.

$$F^* = -\frac{1}{4} \left(\frac{1}{A_0} + \frac{1}{B_0} \right) G'^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{2}{C_0} - \frac{1}{A_0} - \frac{1}{B_0} \right) L'^2 - K' - \underbrace{\frac{\alpha}{C_0} L' \sqrt{G'^2 - L'^2} \cos(\ell' - \nu k' - \beta)}_{\text{critical term}} + \langle U \rangle \quad (530)$$

$\langle U \rangle$: L', G', H' だけの関数

この F^* で運動方程式を解けばよい. 直ちに, $G', H' = \text{const.}, k' = t$

$$\frac{dL'}{dt} = \frac{\partial F^*}{\partial \ell'} = \frac{\alpha}{C_0} L' \sqrt{G'^2 - L'^2} \sin(\ell' - \nu t - \beta) \quad (531)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\ell'}{dt} = -\frac{\partial F^*}{\partial L'} &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{C_0} - \frac{1}{A_0} - \frac{1}{B_0} \right) L' + \frac{\alpha}{C_0} \left(\sqrt{G'^2 - L'^2} - \frac{L'}{\sqrt{G'^2 - L'^2}} \right) \\ &\quad \times \cos(\ell' - \nu t - \beta) - \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial L'} \end{aligned} \quad (532)$$

平衡解：

$$\begin{aligned} \ell' = \nu t + \beta &\quad \text{不安定} \\ \ell' = \nu t + \beta + \pi &\quad \text{安定} \end{aligned} \quad (533)$$

$$\frac{d\ell'}{dt} = \nu$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{2}{C_0} - \frac{1}{A_0} - \frac{1}{B_0} \right) L' - \frac{\alpha}{C_0} \left(\sqrt{G'^2 - L'^2} - \frac{L'}{\sqrt{G'^2 - L'^2}} \right) - \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial L'} \Big|_0 = \nu \quad (534)$$

ここで,

$$\frac{\partial \langle U \rangle}{\partial L'} \ll 1, \quad \sqrt{G'^2 - L'^2} \ll L' \quad (535)$$

より,

$$\frac{\nu}{n_G} = \underbrace{\left(\frac{2}{C_0} - \frac{1}{A_0} - \frac{1}{B_0} \right) \left(\frac{1}{A_0} + \frac{1}{B_0} \right)^{-1}}_{-\frac{1}{305}} + \underbrace{\frac{2}{C_0} \left(\frac{1}{A_0} + \frac{1}{B_0} \right)^{-1}}_{\frac{304}{305}} \frac{\alpha}{J_0} \quad (536)$$

ここで,

$$\alpha = 0.95 \times 10^{-9}, \quad J_0 = 0''2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\nu}{n_G} = -\frac{1}{434} \quad \text{Chandler 周期} \quad (537)$$

このようにごく小さい変位の Resonance で効いている。