天体力学III講義ノート

堀源一郎

Contents

1 質点系としての剛体 **3**

1.1 束縛条件 . . . 3
1.2 Newton の運動の法則 . . . 4
1.3 角運動量の保存 . . . 5
1.4 仕事とエネルギー . . . 6
1.5 剛体の運動 . . . 7

2 慣性能率 **9**

2.1 慣性能率 (面 , 線 , 点に関する) . . . 9
2.2 方向による I の変化 . . . 10
2.3 慣性楕円体の性質 . . . 12
2.3.1 $A \leq B \leq C$ i.e $a \geq b \geq c$ . . . 12
2.3.2 中心慣性楕円体 . . . 13
2.4 中心楕円体の座標軸 . . . 14
2.5 主点 . . . 18
2.5.1 中心楕円体が球 . . . 18
2.5.2 中心楕円体が球でないとき . . . 19
2.6 回転の楕円体 . . . 21

3 オイラーの運動方程式 **22**

3.1 歴史 . . . 22
3.2 剛体の変位 . . . 22
3.2.1 固定軸の回りの回転による変位 . . . 22
3.2.2 剛体の変位 (一般的) . . . 23
3.3 固定点の回りの運動 . . . 26
3.3.1 角速度 . . . 26
3.3.2 角運動量と運動エネルギー . . . 27
3.3.3 i, j, k を慣性主軸にとる . . . 29

3.3.4 $\vec{N} = MV\vec{r}_G\vec{g}$ の場合 . . . 32
3.3.5 支持点 O に働く束縛力 . . . 34
3.3.6 オイラー角の時間変化 . . . 38
3.3.7 $D = C$ の場合 . . . 40
3.3.8 $A = B < C$ (扁球) . . . 41
3.3.9 Poinsot の方法 . . . 42
3.3.10 ポルホードとハーポルホード . . . 45

4 正準方程式 47
4.1 オイラー角 . . . 47
4.2 Andoyer(アンドワイエ) 変数 . . . 48
4.3 重心の回りの自由回転 . . . 52
4.3.1 $A = B$ の場合 . . . 52
4.3.2 $A \neq B < C$ の場合 . . . 52
4.4 有限 2 体問題 . . . 56
4.4.1 M_2 の公転運動 . . . 60
4.4.2 M_j の自転運動 . . . 61
4.5 U の展開 . . . 62
4.6 地球の自転運動 . . . 67
4.7 水星の自転運動 . . . 71
4.8 非剛体の効果 . . . 75

1 質点系としての剛体

1.1 束縛条件

束縛のある質点系として剛体を見る．

$$|\vec{r_j} - \vec{r_k}| = r_{jk} = \text{const.} \tag{1}$$

束縛条件の数

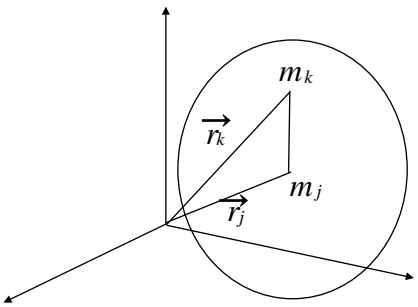

Figure 1: 質点系としての剛体

$$_nC_2 = \frac{n(n-1)}{2} \tag{2}$$

独立な数は？

- 4 質点：

$$_4C_2 = 6 \tag{3}$$

  すべて独立．一辺だけを動かせる (Local に)．

- 5 質点：

$$_5C_2 = 10 \tag{4}$$

  すべて独立ではない．E は BCD からの距離で決まる．すると n 個

$6 + 4$	束縛
$6 + 3$	独立な束縛

Table 1: 束縛

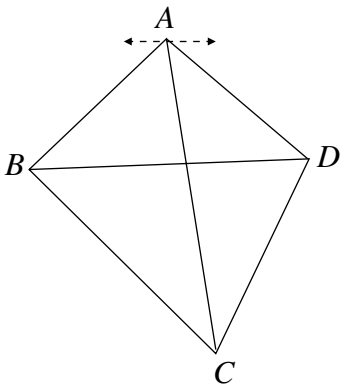

Figure 2: 4 質点

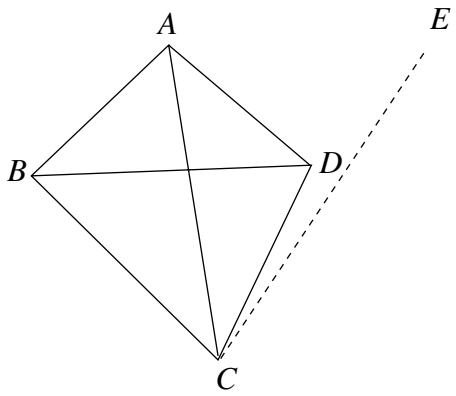

Figure 3: 5 質点

$$\text{束縛：} \qquad 6+4+5+\cdots+n-1=\frac{n(n-1)}{2} \tag{5}$$

$$\text{独立な束縛} \qquad 6+\underbrace{3+3+\cdots+3}_{n-4}=3n-6 \tag{6}$$

よって，剛体の自由度は，

$$3n-(3n-6)=6 \tag{7}$$

$$6=\underbrace{3}_{\text{重心の位置}}+\underbrace{2}_{\text{軸方向}}+\underbrace{1}_{\text{回転}} \tag{8}$$

1.2 Newton の運動の法則

$$m_j\ddot{\vec{r}}_j = \vec{f}_j \tag{9}$$

$$\vec{f}_j = \underbrace{\vec{f}_j^{(i)}}_{\text{質点同士の力}}+\vec{f}_j^{(e)} \tag{10}$$

$$\vec{f}_j^{(i)} = \sum_{k\neq j} \vec{f}_{jk} \Rightarrow \text{束縛力} \tag{11}$$

$$\vec{f}_{jk} = -\vec{f}_{Kj} \propto \vec{r}_j - \vec{r}_k \tag{12}$$

よって，束縛力は[1] ，

$$\sum \vec{f}_j^{(i)} = 0 \quad \text{定義より} \tag{13}$$

重心の運動[2]

$$M\ddot{\vec{r}}_G = \vec{f}_j^{(e)} = vecf \tag{14}$$

$$\frac{d}{dt}(Md\dot{\vec{o}}tr_G) = \vec{f} \tag{15}$$

1.3　角運動量の保存

$$\sum m_j(\vec{r}_j \times \ddot{\vec{r}}_j) = \sum \vec{r}_j \times \vec{f}_j^{(i)} + \sum \vec{r}_j \times \vec{f}_j^{(e)} = \sum \vec{r}_j \times \vec{f}^{(e)} \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
\sum(\vec{r}_j \times \vec{f}_j) &= \sum_{j>k} \vec{r}_j \times \vec{f}_j + \sum_{k>j} \vec{r}_k \times \vec{k}_k \\
&= \sum_{j>k} \vec{r}_j \times \vec{f}_j - \sum_{k>j} \vec{r}_j \times \vec{f}_j \\
&= \sum_{j>j} (\vec{r}_{j+k} - \vec{r}_{j-k}) \times \vec{f}_{j+k} \quad (k \to -k) \\
&= \sum (\vec{r}_{j-k} - \vec{r}_{j+k}) \times \vec{f}_{j-k} \quad (\vec{f}_{j+k} = -\vec{f}_{j-k}) \\
&= \sum (\vec{r}_k \times \vec{f}_k) = 0
\end{aligned} \tag{17}$$

よって，

$$\frac{d}{dt}\left(\sum_j m_j \vec{r}_j \times \dot{\vec{r}}_j\right) = \sum_j \left(\vec{r}_j \times \vec{f}_j\right) \tag{18}$$

$$\dot{\vec{G}} = \vec{N} \tag{19}$$

原点に対する Moment の保存．勿論，単位ベクトルとの内積を取れば，固定軸 $A(\vec{a})$ について軸まわりの Moment の保存．

$$\vec{a} \cdot \dot{\vec{G}} = \vec{a} \cdot \vec{N} \tag{20}$$

$\vec{N}$ に直交な軸のまわりの Moment は保存される．
さらに，重心を通る軸の回りに Moment は保存される (重心は動いても良い．固定軸ではない)．

(21)

[1] 束縛力の大きさは剛体の運動によって変わる．

[2] 分裂すれば $\vec{r}_j$ が変わるので，$\vec{f}_j^{(e)}$ が異なるので，重心の運動は変わる．

$$\begin{aligned}\vec{r}_j &= \vec{r}_G + \vec{\rho}_j \\ \vec{r}_j \times \dot{\vec{r}}_j &= \vec{r}_G \times \dot{\vec{r}}_G + \vec{r}_G \times \dot{\vec{\rho}}_j + \vec{\rho}_j \times \dot{\vec{r}}_G + \vec{\rho} \times \dot{\vec{\rho}}_j\end{aligned}$$

$\sum m_j$ を施すと，

$$\begin{aligned}\sum m_j \left(\vec{r}_j \times \dot{\vec{r}}_j\right) &= M\vec{r}_G \times \dot{\vec{r}}_G + \sum m_j \vec{\rho}_j \times \dot{\vec{\rho}}_j \\ &\quad \left(\sum m_j \vec{r}_G = 0, \quad \sum \dot{\vec{r}}_G = 0\right)\end{aligned} \tag{22}$$

$\frac{d}{dt}$ を施して，

$$\begin{aligned}& M\vec{r}_G \times \ddot{\vec{r}}_G + \frac{d}{dt}\sum m_j r\dot{\vec{h}}o_j \times \dot{\vec{\rho}}_j \\ = \;& \vec{r}_G \times \sum_j \vec{f}_j^{(e)} + \sum_j \vec{\rho}_j \times \vec{f}_j^{(e)}\end{aligned}$$

$$M\ddot{\vec{r}}_G = \sum \vec{f}_j^{(e)} = \vec{f}$$

より，

$$\frac{d}{dt}\sum m_j \left(\vec{\rho}_j \times \dot{\vec{\rho}}_j\right) = \sum \vec{\rho}_j \times \vec{f}_j^{(e)} \tag{23}$$

1.4 仕事とエネルギー

(10) より，

$$\sum m_j \vec{r}_j \cdot \ddot{\vec{r}}_j = \sum \left(\vec{r}_j \cdot \vec{f}_j^{(i)} + \vec{r}_j \cdot \vec{f}_j^{(e)}\right) \tag{24}$$

t で積分して，

$$\frac{1}{2}\sum m_j \left(\dot{\vec{r}}_j\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\sum m_j \dot{\vec{r}}_j\right)_0^2 = \int_0^t \sum \left(\underbrace{\vec{r}_j \cdot \vec{f}_j^{(i)}}_{\neq 0} + \vec{r}_j \cdot \vec{f}^{(e)} \right) dt \tag{25}$$

これはエネルギーの保存．$\vec{r}_j = \vec{r}_G + \vec{\rho}_j$ と置くと，

$$\left(\dot{\vec{r}}_j\right)^2 = \dot{\vec{r}}_G^2 + 2\dot{\vec{r}}_G \cdot \dot{\vec{\rho}}_j + \dot{\vec{\rho}}_j^2 \tag{26}$$

代入すれば，

$$\frac{1}{2}\sum m_j \left(\dot{\vec{r}}_j\right)^2 = \underbrace{\frac{1}{2}M(\dot{\vec{r}}_G)^2}_{\text{外部運動エネルギー}} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum m_j (\dot{\vec{\rho}}_j)^2}_{\text{内部運動エネルギー}} \tag{27}$$

(14) より，

$$M\ddot{\vec{r}}_G \cdot \dot{\vec{r}}_G = \sum \dot{\vec{r}}_G \cdot \vec{f}_j^{(e)} \tag{28}$$

代入すれば，

$$\underbrace{\frac{1}{2}M\dot{\vec{r}}_G^2 - \left(\frac{1}{2}M\dot{\vec{r}}_G\right)_0^2}_{\text{外部運動エネルギーの変化}} = \underbrace{\int \sum \vec{f}_j^{(e)} d\vec{r}_G}_{\text{外力が重心の変化に対して行った外部仕事}} \qquad \left(\frac{d\vec{r}_G}{dt}dt = d\vec{r}_G\right) \tag{29}$$

(25) の右辺，

$$\begin{aligned} &\int \sum \left(\vec{f}_j^{(i)} + \vec{f}_j^{(e)}\right) \cdot (d\vec{r}_G + d\vec{\rho}_j) \\ = &\underbrace{\int \sum \vec{f}_j^{(i)} \cdot d\vec{r}_G}_{=0} + \underbrace{\int \sum \vec{f}_j^{(e)} \cdot d\vec{r}_G}_{\text{外力の外部仕事}} + \underbrace{\int \sum (\vec{f}_j^{(i)} + \vec{f}_j^{(e)}) \cdot d\vec{\rho}_j}_{\text{内部仕事}} \end{aligned} \tag{30}$$

$$\int \sum \vec{f}_j^{(i)} \cdot d\vec{\rho}_j \quad \text{内力の内部仕事} \tag{31}$$

$$\int \sum \vec{f}_j^{(e)} \cdot d\vec{\rho}_j \quad \text{内力の外部仕事} \tag{32}$$

これより，

$$\underbrace{\frac{1}{2}\sum m_j \dot{\vec{\rho}}_j^2 - \frac{1}{2}\left(\sum m_j \dot{\vec{\rho}}_j^2\right)_0}_{\text{内部運動エネルギーの変化}} = \underbrace{\int \sum \left(\vec{f}_j^{(i)} + \vec{f}_j^{(e)}\right) \cdot d\vec{\rho}_j}_{\text{内部仕事}} \tag{33}$$

剛体では，

$$\int \sum \vec{f}_j^{(i)} \cdot d\vec{\rho}_j = 0 \tag{34}$$

太陽系に働く外力では，平行とみなせるので，

$$\vec{f}_j^{(e)} = m_j \vec{f} \rightarrow \int \sum \vec{f}_j^{(e)} \cdot d\vec{\rho}_j = \vec{f} \cdot \int m_j d\vec{\rho}_j = 0 \tag{35}$$

内部に対して仕事はしない．ただし，近くを恒星が通るときは別である．

1.5 剛体の運動

(14) より，

$$M\ddot{\vec{r}}_G = \vec{f}\left(= \sum \vec{f}_j^{(e)}\right) \tag{36}$$

- 偶力は重心の運動に関与しない．
- 放物体の重心は放物線を描く

$$\vec{f}_j^{(e)} = -k^2 m_j \vec{r}_j \tag{37}$$

のとき[3] ，

$$M\ddot{\vec{r}}_G = -k^2 M\vec{r}_G \quad \Rightarrow \quad \ddot{\vec{r}}_G = -k^2\vec{r}_G \quad (\text{harmonic motion}) \tag{38}$$

[3] $f \propto \frac{1}{r^2}$ のときはこうは行かない．

(19) から，

$$\begin{aligned}\vec{G} &= \sum m_j \left(\vec{r}_j \times \dot{\vec{r}}_j\right) \\ &= M\left(\vec{r}_G \times \dot{\vec{r}}_G\right) + \sum m_j \left(\vec{\rho}_j \times \dot{\vec{\rho}}_j\right)\end{aligned} \tag{39}$$

特に，

- $\vec{f}_j^{(e)}$ の性質：$\vec{f} = \sum m_j \vec{f}_j^{(e)}$ が剛体の向きによらないならば，並進運動（重心の運動）は自転に影響されない（$\vec{f}$ にのみよるから）．

また，

- $vecG$ が剛体の位置（重心の位置）によらないならば，自転は並進運動に影響されない．

(29) から，

$$\frac{1}{2}M\dot{\vec{r}}_G^2\Big|_0^t = \int_0^t \vec{f}\cdot d\vec{r}_G \tag{40}$$

剛体の自由落下，

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}M(v^2 - v_0^2) &= \int_0^t M\vec{g}\cdot d\vec{r}_G \\ &= Mg\int dh = Mg\underbrace{h}_{\text{落差}}\end{aligned} \tag{41}$$

(33) から，

$$\frac{1}{2}\sum m_j\dot{\vec{\rho}}_j^2\Big|_0^t = \int_0^t \sum \vec{f}_j^{(e)}\cdot d\vec{\rho}_j \tag{42}$$

すなわち，剛体では内部の内部仕事はゼロ．

$$\vec{f}_j^{(i)} = \sum_k \vec{f}_{jk},\quad \vec{f}_{jk} = -\vec{f}_{kj} \tag{43}$$

$\vec{f}_{jk}$ と $\vec{f}_{kj}$ がなす仕事を W_{jk} とすると，

$$dW_{jk} = \vec{f}_{jk}\cdot d\vec{\rho}_j + \vec{f}_{kj}\cdot d\vec{\rho}_k = \vec{f}_{jk}\left(d\vec{\rho}_j - d\vec{\rho}_k\right) \tag{44}$$

$(\vec{\rho}_j - \vec{\rho}_k)^2 =$ 一定 だから（束縛力の定義），

$$(\vec{\rho}_j - \vec{\rho}_k)\cdot\left(\dot{\vec{r}}_j - \dot{\vec{r}}_k\right) = 0 \tag{45}$$

よって，

$$\vec{f}_{jk} \propto \vec{r}_j - \vec{r}_k = \vec{\rho}_j - \vec{\rho}_k \Rightarrow \vec{f}_{jk}\cdot(\vec{\rho}_j - \vec{\rho}_k) = 0 \tag{46}$$

したがって，

$$dW_{jk} = 0 \Rightarrow \int \sum \vec{f}_j^{(i)}\cdot d\vec{\rho}_j = \sum_{j>k} W_{jk} = 0 \tag{47}$$

外力の $\begin{pmatrix}\text{外部}\\ \text{内部}\end{pmatrix}$ 仕事は，剛体の $\begin{pmatrix}\text{外部}\\ \text{内部}\end{pmatrix}$ 運動エネルギーの変化に等しい．

2 慣性能率

2.1 慣性能率（面，線，点に関する）

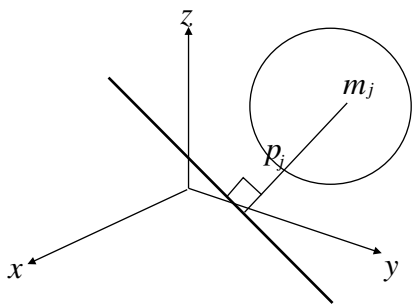

Figure 4: 慣性能率

$$I = \sum m_j p_j^2, \quad p_j : m_j \text{と面，線，点との距離} \tag{48}$$

面：

$$I_{yz} = \sum m_j x_j^2, \quad I_{zx} = \sum m_j y_j^2, \quad I_{xy} = \sum m_j z_j^2 \tag{49}$$

軸：[4]

$$\left.\begin{aligned} A \equiv I_x &= \sum m_j \left(y_j^2 + z_j^2\right) = I_{zx} + I_{xy} \\ B \equiv I_y &= \sum m_j \left(z_j^2 + x_j^2\right) = I_{xy} + I_{yz} \\ C \equiv I_z &= \sum m_j \left(x_j^2 + y_j^2\right) = I_{yz} + I_{zx} \end{aligned}\right\} \tag{50}$$

原点：

$$I_0 = \sum m_j \left(x_j^2 + y_j^2 + z_j^2\right) = I_{xy} + I_{yz} + I_{zx} = \frac{1}{2}(A + B + C) \tag{51}$$

慣性積：

$$\left.\begin{aligned} D \equiv P_x &= \sum m_j y_j z_j \\ E \equiv P_y &= \sum m_j z_j x_j \\ F \equiv P_z &= \sum m_j x_j y_j \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

これより直ちに，

$$I_x > 2P_x, \quad I_y > 2P_y, \quad I_z > 2P_z, \quad I_0 > P_x + P_y + P_z \tag{53}$$

[4]
$$I_{xy} = \frac{A + B + C}{2} - C, \quad I_{yz} = \frac{A + B + C}{2} - A, \quad I_{zx} = \frac{A + B + C}{2} - B$$

回転半径：k_*

$$I_* = Mk_*^2 \quad \text{なる} \quad k_*, \quad M\sum m_j \tag{54}$$

k_* は I_* による．

主回転半径：k_0 面，線，点が重心を含むとき $k_* = k_0$．平行に p だけ動かせば

$$k^2 = k_0^2 + p^2 \to k \geq k_0 \tag{55}$$

ただちに，

$$I \geq I_p, \quad I = Mk^2, \quad I_p = Mk_0^2 \tag{56}$$

よって，平行移動で I_p を minimum にするには重心を通れば良い．

2.2　方向による I の変化

回転移動で I はどう変わるか？

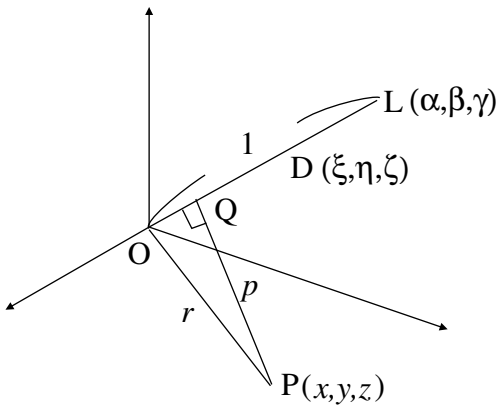

Figure 5: 方向による I の変化

$$\begin{aligned}
p^2 &= r^2 - \bar{\mathrm{OQ}}^2 \\
&= (x^2+y^2+z^2)\underbrace{(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)}_{=1} - (\alpha x+\beta y+\gamma z)^2 \\
&= \alpha^2(y^2+z^2)+\beta^2(z^2+x^2)+\gamma^2(x^2+y^2)-2\beta\gamma yz-2\gamma\alpha zx-2\alpha\beta zy \qquad (57) \\
L_L &= \sum mp^2 \\
&= A\alpha^2+B\beta^2+C\gamma^2-2D\beta\gamma-2E\gamma\alpha-2F\alpha\beta \\
&= \frac{M\ell^4}{\bar{\mathrm{OD}}^2}, \quad \ell : \text{代表的な長さ} \qquad (58)
\end{aligned}$$

これを満たす $\bar{\mathrm{OD}}$ が決まる．D は方向 L によって決まる．この D 点の軌跡は[5] ，

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 - 2D\eta\zeta - 2E\zeta\xi - 2F\xi\eta = M\ell^4 \tag{59}$$

これは $A, B, C > 0$ より，楕円面を表す．これを慣性楕円体という．これを主軸変換すれば $D, E, F = 0$ となる．
慣性主軸：(59) を，

$$\varphi(\xi, \eta, \zeta) = 0 \tag{60}$$

とかく．主軸と楕円面の交点では，

$$\vec{r} \| \vec{n}, \quad \vec{n} = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}, \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}, \frac{\partial\varphi}{\partial\zeta} \right), \quad \vec{r} = (\xi, \eta, \zeta) \tag{61}$$

よって，

$$\frac{A\xi - E\zeta - F\eta}{\xi} = \frac{B\eta - D\zeta - F\xi}{\eta} = \frac{C\zeta - D\eta - E\xi}{\zeta} \tag{62}$$

$\bar{\mathrm{OD}}$ で割って[6] ，

$$I_L = \frac{A\alpha - E\gamma - F\beta}{\alpha} = \frac{B\beta - D\gamma - F\alpha}{\beta} = \frac{C\gamma - D\beta - E\alpha}{\gamma} \tag{63}$$

よって，

$$\begin{pmatrix} A - I_L & -F & -E \\ -F & B - U_L & -D \\ -E & -D & C - I_L \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = 0 \tag{64}$$

Non-trivial より $\det = 0$，

$$\begin{vmatrix} A - I_L & -F & -E \\ -F & B - I_L & -D \\ -E & -D & C - I_L \end{vmatrix} = 0 \tag{65}$$

これは 3 つの正根をもつ：I_1, I_2, I_3
$I = I_j, (\alpha_j, \beta_j, \gamma_j)$ とおくと，

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\alpha_j}{\gamma_j} = \frac{D(B-I_j)+DF}{(A-I_j)(B-I_j)-F^2} = a_j \\ \frac{\beta_j}{\gamma_j} = \frac{D(A-I_j)+EF}{(A-I_j)(B-I_j)-F^2} = b_j \\ \alpha_j^2 + \beta_j^2 + \gamma_j^2 = 1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} \alpha_j = \pm\frac{a_j}{\sqrt{a_j^2+b_j^2+1}} \\ \beta_j = \pm\frac{b_j}{\sqrt{a_j^2+b_j^2+1}} \\ \gamma_j = \pm\frac{1}{\sqrt{a_j^2+\beta_j^2+1}} \end{array} \tag{66}$$

---

[5] $$\alpha \cdot \bar{\mathrm{OD}} = \xi, \quad \beta \cdot \bar{\mathrm{OD}} = \eta, \quad \gamma \cdot \bar{\mathrm{OD}} = \zeta$$

[6] $$\frac{(\quad)\alpha + (\quad)\beta + (\quad)\gamma}{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2} = (\quad)\alpha + (\quad)\beta + (\quad)\gamma = L_L$$

このとき，

$$I_j = A\alpha_j^2 + B\beta_j^2 + C\gamma_j^2 - 2D\beta_j\gamma_j - 2E\gamma_j\alpha_j - 2F\alpha_j\beta_j > 0 \tag{67}$$

$x, y, z \longrightarrow x', y', z'$ へ変換

$$\begin{array}{c|ccc} & x & y & z \\ \hline x' & \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ y' & \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ z' & \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{array} \quad \left\{ \begin{array}{l} A' = I_1 \\ B' = I_2 \\ C' = I_3 \\ D' = E' = F' = 0 \end{array} \right. \tag{68}$$

$$(19) \leftrightarrow I_L = I_1\alpha^2 + I_2\beta^2 + I_3\gamma^2 \tag{69}$$

この，

- x', y', z' を慣性主軸という．
- I_1, I_2, I_3 を主慣性能率という．
- $x'y', y'z', z'x'$ 面を主慣性面という．

主軸の長さの半分を a, b, c（主半径）とすると，

$$I_1 = \frac{M\ell^4}{a^2}, \quad I_2 = \frac{M\ell^4}{b^2}, \quad I_3 = \frac{M\ell^4}{c^2} \tag{70}$$

$a > b > c$ なら $I_1 < I_2 < I_3$
O が G に一致するとき中心 (central) と呼ぶ．

2.3　慣性楕円体の性質

2.3.1　$A \leq B \leq C$ **i.e** $a \geq b \geq c$

$$A + B \geq C \tag{71}$$

より，

$$\begin{aligned} &\frac{1}{B} \geq \frac{1}{C} \geq \frac{1}{A+B} \\ &1 - \frac{A}{B} \leq 1 - \frac{A}{C} \leq 1 - \frac{A}{A+B} \\ &\frac{B-A}{B} \leq \frac{C-A}{C} \leq \frac{B}{A+B} \end{aligned} \tag{72}$$

よって[7] ．

$$e_z^2 \leq e_y^2 \leq \frac{1}{2-e_z^2} \tag{73}$$

e_z^2 given：

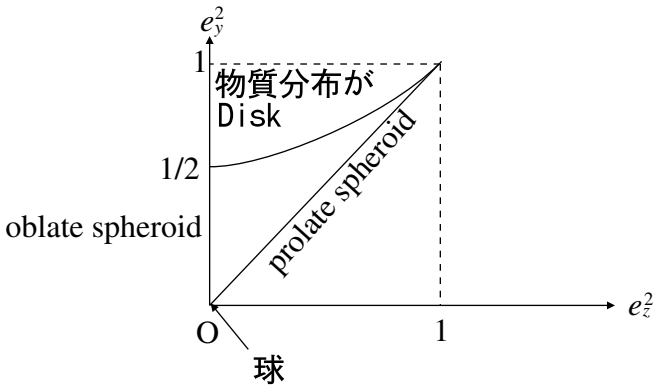

Figure 6: $e_z^2 - -e_y^2$

1. e_y^2 min. at $B = C$：
   prolate spheroid (回転楕円体：ハマキ型)

2. e_y^2 max. at $A + B = C$：
   物質分布は Disk (円盤)

3. $e_z = 0$ at $A = B$：
   oblate spheroid (回転楕円体：パンケーキ型)

$$e_{z\max}^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{A}{C} \geq \frac{1}{2} \quad \text{i.e} \quad \frac{c}{a} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{あまり平たくなれない} \tag{74}$$

2.3.2　中心慣性楕円体

z 軸が原点 O における慣性主軸である条件は，

$$D = \sum myz = 0, \quad E = \sum mzx = 0 \tag{75}$$

z 軸が O′ における慣性主軸でもあるためには，

$$\sum my(z-h) = 0, \quad \sum m(z-h)x = 0 \tag{76}$$

これより，

[7]

$$e_z^2 = \frac{B-A}{B}$$

とおく．

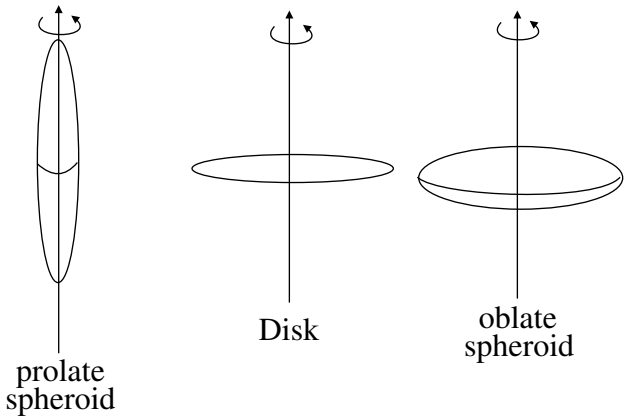

Figure 7: prolate spheroid, disk, oblate spheroid

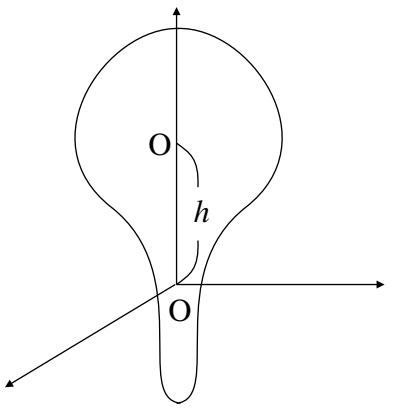

Figure 8: 中心慣性楕円体

$$h\sum my = h\sum mx = 0 \Longrightarrow \sum my = \sum mx = 0 \tag{77}$$

z 軸は重心を通る．ある軸 ℓ が軸上の 2 点において各々主軸→ ℓ は重心を通る．

2.4 中心楕円体の座標軸

平面 π：

$$u\xi + v\eta + w\zeta = 1 \tag{78}$$

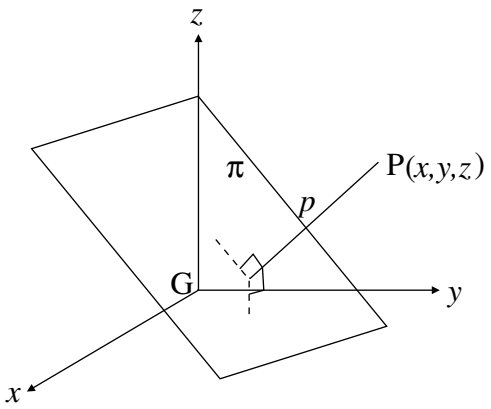

Figure 9: 中心慣性楕円体の座標軸

π に関する慣性能率 I_π を考える[8] ．

$$\begin{aligned} I_\pi &= \sum mp^2 = \sum m\frac{(ux+vy+wz-1)^2}{u^2+v^2+w^2} \\ &= \frac{u^2\sum mx^2 + v^2\sum my^2 + w^2\sum mz^2 + M}{u^2+v^2+w^2} \end{aligned} \tag{79}$$

今，a, b, c を yz 面，zx 面，xy 面（主慣性面）に関する回転半径とする．

$$\sum mx^2 = Ma^2, \quad \sum my^2 = Mb^2, \quad \sum mz^2 = Mc^2 \tag{80}$$

$I_\pi = Mk^2$ とすると，

$$k^2 = \frac{u^2a^2 + v^2b^2 + w^2c^2 + 1}{u^2+v^2+w^2} \tag{81}$$

この k を一定とする一群の面の包絡面を考えよう．

$$u^2(k^2-a^1) + v^2(k^2-b^2) + w^2(k^2-c^2) = 1 \tag{82}$$

この包絡面は

$$\frac{\xi^2}{k^2-a^2} + \frac{\eta^2}{k^2-b^2} + \frac{\zeta^2}{k^2-c^2} = 1 \tag{83}$$

となる．これは共焦点 2 次曲面と呼ばれるものである．$c^2 \le b^2 \le a^2$ とすると，k の値によって色々変わる．

1. $k^2 > a^2$：楕円面
2. $b^2 < k^2 < a^2$：一葉双曲面
3. $c^2 < k^2 < b^2$：二葉双曲面

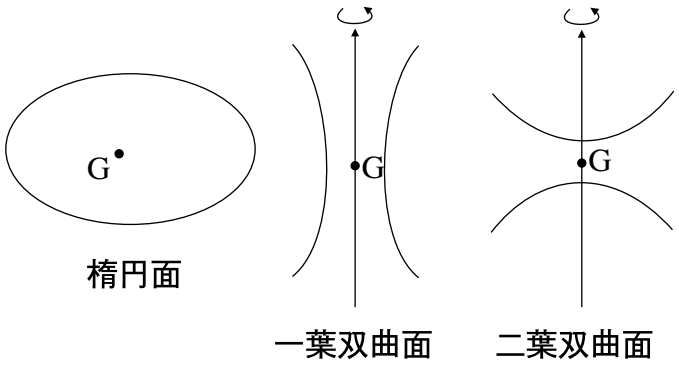

Figure 10: 共焦点 2 次曲面

(ξ,η,ζ) を与えて解くと (83) は 3 次方程式となる．$k^2 \Rightarrow$ 3 つの正根がでる：k_1^2, k_2^2, k_3^2．一般に，

$$c^2 < k_3^2 < b^2 < k_2^2 < a^2 < k_1^2 \tag{84}$$

この $P(\xi,\eta,\zeta)$ を通る k_1, k_2, k_3 に指定される 3 直交曲面の接平面は 3 枚存在する（これは包絡面を作る前の面と一致する）．接平面の方程式は[9] ，

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\xi_0}{k_1^2-a^2}\xi + \frac{\eta_0}{k_1^2-b^2}\eta + \frac{\zeta_0}{k_1^2-c^2}\zeta = 1 \\ \frac{\xi_0}{k_2^2-a^2}\xi + \frac{\eta_0}{k_2^2-b^2}\eta + \frac{\zeta_0}{k_2^2-c^2}\zeta = 1 \\ \frac{\xi_0}{k_3^2-a^2}\xi + \frac{\eta_0}{k_3^2-b^2}\eta + \frac{\zeta_0}{k_3^2-c^2}\zeta = 1 \end{array}\right\} \tag{85}$$

Binet の定理：$P(\xi_0,\eta_0,\zeta_0)$ における 3 つの主慣性面は P を通る 3 つの共焦点 2 次曲面に接し，また P における主慣性面における慣性能率の値は Mk_1^2, Mk_2^2, Mk_3^2 に等しい．ξ,η,ζ 軸へ座標変換する．

$$\xi = \xi_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z \tag{86}$$

$$\eta = \eta_0 + \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 z \tag{87}$$

$$\zeta = \zeta_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 y + \gamma_3 z \tag{88}$$

ここで，

$$\alpha_1 = \rho_1 \frac{\xi_0}{k_1^1 - a^2}, \quad \alpha_2 = \rho_2 \frac{\xi_0}{k_2^1 - a^2}, \quad \alpha_3 = \rho_3 \frac{\xi_0}{k_3^1 - a^2} \tag{89}$$

---

[8]
$$p = \frac{|ax+by+cz-1|}{\sqrt{a^2+b^2+1}}, \quad M = \sum m$$

[9] これは，

$$u\xi + v\eta + w\zeta = 1$$

に対応する．

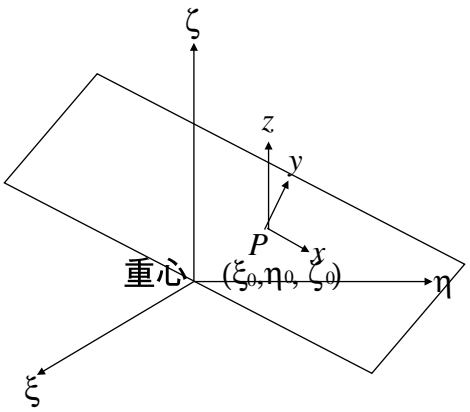

Figure 11: Binet の定理

$$\beta_1 = \rho_1 \frac{\eta_0}{k_1^2 - b^2}, \quad \beta_2 = \rho_2 \frac{\eta_0}{k_2^2 - b^2}, \quad \beta_3 = \rho_3 \frac{\eta_0}{k_3^2 - b^2} \tag{90}$$

$$\gamma_1 = \rho_1 \frac{\zeta_0}{k_1^2 - c^2}, \quad \gamma_2 = \rho_2 \frac{\zeta_0}{k_2^2 - c^2}, \quad \gamma_3 = \rho_3 \frac{\zeta_0}{k_3^2 - c^2} \tag{91}$$

$$\rho_i^2 = \left[\left(\frac{\xi_0}{k_1^2 - a^2} \right)^2 + \left(\frac{\eta_0}{k_2^2 - b^2} \right)^2 + \left(\frac{\zeta_0}{k_3^2 - c^2} \right)^2 + \right]^{-1} \tag{92}$$

これを解くと，

$$\begin{aligned} x &= \alpha_1\xi + \beta_1\eta + \gamma_1\zeta - (\alpha_1\xi_0 + \beta_1\eta_0 + \gamma_1\zeta_0) \\ &= \alpha_1\xi + \beta_1\eta + \gamma_1\zeta - \rho_1 \qquad (93) \\ &\quad \left(k_j \text{は (83) を満たすから } \alpha_1\xi_0 + \beta_1\eta_0 + \gamma_1\zeta_0 = \rho_1 \left(\frac{\xi_0}{k_1^2 - a^2} + \frac{\eta_0}{k_2^2 - b^2} + \frac{\zeta_0}{k_3^2 - c^2} \right) = \rho_1 \right) \\ y &= \alpha_2\xi + \beta_2\eta + \gamma_2\zeta - \rho_2 \qquad (94) \\ z &= \alpha_3\xi + \beta_3\eta + \gamma_3\zeta - \rho_3 \qquad (95) \end{aligned}$$

さて，

$$\sum m\xi = \sum m\eta = \sum m\zeta = \sum m\xi\eta = \sum m\eta\zeta = \sum m\zeta\xi = 0 \tag{96}$$

主慣性面に関する慣性能率は[10] ，

$$\begin{aligned} \sum mx^2 &= \sum m(\alpha_1\xi + \beta_1\eta + \gamma_1\zeta - \rho_1)^2 \\ &= M(\alpha_1^2 a^2 + \beta_1^2 b^2 + \gamma_1^2 c^2 + \rho_1^2) \\ &= M\rho_1^2 \left[\left(\frac{a\xi_0}{k_1^2 - a^2} \right)^2 + \left(\frac{b\eta_0}{k_1^2 - b^2} \right)^2 + \left(\frac{c\zeta_0}{k_1^2 - c^2} \right)^2 + 1 \right] \end{aligned} \tag{97}$$

[10]

$$\sum m\xi^2 = Ma^2, \quad \sum m\eta^2 = Mb^2, \quad \sum m\zeta^2 = Mc^2$$

いっぽう，

$$1 = \frac{\xi_0^2}{k_1^2 - a^2} + \frac{\eta_0^2}{k_1^2 - b^2} + \frac{\zeta_0^2}{k_1^2 - c^2} \tag{98}$$

より，

$$\begin{aligned} \sum mx^2 &= M\rho_1^2 \left[\frac{k_1^2 \xi_0^2}{(k_1^2 - a^2)^2} + \frac{k_1^2 \eta_0^2}{(k_1^2 - b^2)^2} + \frac{k_1^2 \zeta_0^2}{(k_1^2 - c^2)^2} \right] \\ &= M\rho_1^2 k_1^2 \frac{1}{\rho_1^2} = Mk_1^2 \end{aligned} \tag{99}$$

同様に，

$$\sum my^2 = Mk_2^2 \tag{100}$$

$$\sum mz^2 = Mk_3^2 \tag{101}$$

$$\sum mxy = \sum myz = \sum mzx = 0 \tag{102}$$

さて，P における慣性楕円体は，

$$A = \sum m(y^2 + z^2) = M(k_2^2 + Mk_3^2) \tag{103}$$

等により，

$$M(k_2^2 + k_3^2)x^2 + M(k_3^2 + k_1^2)y^2 + M(k\ 2_1 + k_2^2) = M\ell^4 \tag{104}$$

よって，

$$(k_2^2 + k_3^2)x^2 + (k_3^2 + k_1^2)y^2 + (k\ 2_1 + k_2^2) = \ell^4 \tag{105}$$

ここで ℓ は代表的な長さである．$k_1 > k_2 > k_3$ より，

- 最長軸は楕円面に垂直
- 最短軸は二葉双極面に垂直

2.5　主点

The principal point of a given line
線 ℓ がその点 P の慣性主軸であるような ℓ 上の点

2.5.1　中心楕円体が球

- G を通れば ℓ 上のどこでも主点
- G を通らなければ ℓ 上に降ろした G からの足 P

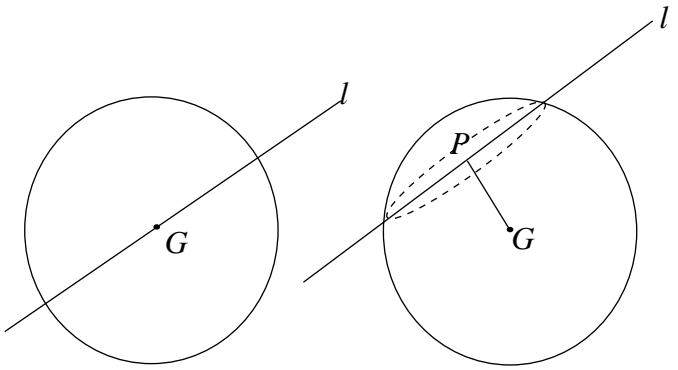

Figure 12: 中心楕円体が球

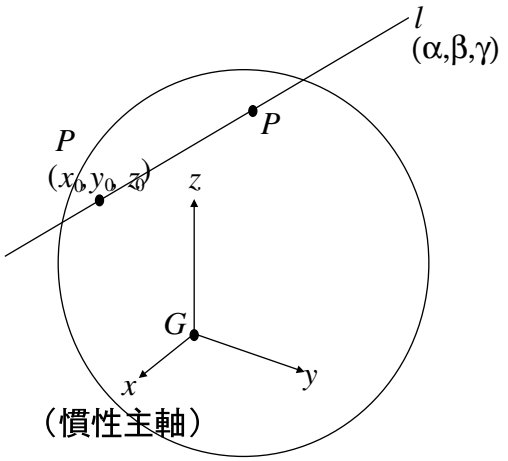

Figure 13: 中心楕円体が球でないとき

2.5.2　中心楕円体が球でないとき

ℓ :

$$x = x_0 + \alpha s, \quad y = y_0 + \beta s, \quad z = z_0 + \gamma s \tag{106}$$

今，点 $P(x, y, z)$ が主点とする．

$$a, b, c \quad \text{...} \quad \text{主慣性面に対する回転半径}$$

P が主点だから 3 つの直交曲面のうち，1 つが ℓ に直交している．直交曲面の方程式は (83) より，

$$\frac{x^2}{k^2 - a^2} + \frac{y^2}{k^2 - b^2} + \frac{z^2}{k^2 - c^2} = 1 \tag{107}$$

ℓ がこれに直交するには

$$\alpha = \frac{1}{R}\frac{x_0 + \alpha s}{k^2 - a^2}, \quad \beta = \frac{1}{R}\frac{y_0 + \beta s}{k^2 - b^2}, \quad \gamma = \frac{1}{R}\frac{z_0 + \gamma s}{k^2 - c^2} \tag{108}$$

$$R^2 = \left(\frac{x_0+\alpha s}{k^2-a^2}\right)^2 + \left(\frac{y_0+\beta s}{k^2-b^2}\right)^2 + \left(\frac{z_0+\gamma s}{k^2-c^2}\right)^2 \quad \text{Normaling Factor} \tag{109}$$

でなければならない．

1. ℓ が重心 G を通る時

   $(x_0, y_0, z_0) = (0,0,0)$ と出来るから，

   $$\alpha\left(1-\frac{1}{R}\frac{s}{k^2-a^2}\right)=0, \quad \beta\left(1-\frac{1}{R}\frac{s}{k^2-b^2}\right)=0, \quad \gamma\left(1-\frac{1}{R}\frac{s}{k^2-c^2}\right)=0, \tag{110}$$

   これが成り立つには ℓ が，

   $$(1,0,0), \quad (0,1,0), \quad (0,0,1) \tag{111}$$

   でなければならない (主慣性軸 (座標軸))．

2. ℓ が重心 G を通らない時

   (108) より，

   $$R = \frac{x_0+\alpha s}{\alpha(k^2-a^2)} = \frac{y_0+\beta s}{\beta(k^2-b^2)} = \frac{z_0+\gamma s}{\gamma(k^2-c^2)} \tag{112}$$

   s, k を消去すると，

   $$R = \frac{\frac{y_0}{\beta}-\frac{x_0}{\alpha}}{a^2-b^2} = \frac{\frac{z_0}{\gamma}-\frac{y_0}{\beta}}{b^2-c^2} = \frac{\frac{x_0}{\alpha}-\frac{y_0}{\beta}}{c^2-a^2} \tag{113}$$

   これより，

   $$\frac{b^2-c^2}{\alpha}x_0 + \frac{c^2-a^2}{\beta}y_0 + \frac{a^2-b^2}{\gamma}z_0 = 0 \tag{114}$$

   もちろんこれは ℓ を含む平面の式である．

3. k, s の値

   $$R^2\alpha^2(k^2-a^2) + R^2\beta^2(k^2-b^2) + R^2\gamma^2(k^2-c^2) = 1 \tag{115}$$

   $$R^2k^2 - R^2(\alpha^2a^2+\beta^2b^2+\gamma^2c^2) = 1 \tag{116}$$

   よって，

   $$k^2 = \frac{1}{R^2} + (a^2\alpha^2+b^2\beta^2+c^2\gamma^2) \tag{117}$$

   したがって，

   $$s = R(k^2-a^2) - \frac{x_0}{\alpha} = R(k^2-b^2) - \frac{y_0}{\beta} = R(k^2-c^2) - \frac{z_0}{\gamma} \tag{118}$$

   $$\begin{aligned} s &= Rk^2 - (a^2\alpha^2+b^2\beta^2+c^2\gamma^2) - (\alpha x_0+\beta y_0+\gamma z_0) \\ &= \frac{1}{R} - (\alpha x_0+\beta y_0+\gamma z_0) \end{aligned} \tag{119}$$

2.6　回転の楕円体

Ellipsiod of Joyration

O 点における慣性楕円体を，

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = M\ell^4 \tag{120}$$

$$\frac{x^2}{A} + \frac{y^2}{B} + \frac{z^2}{C} = \frac{1}{M} \tag{121}$$

(120) について (121) を回転の楕円体という．(121) の各軸の長さは (120) の回転半径である．(120) と (121) は相反 (reciplocal) であるという．

3 オイラーの運動方程式

3.1 歴史

1749	d'Akembert	剛体の自由回転
1758	Euler	オイラーの運動方程式
	Jacobi	外力が固定点を通る 1 つの力で Euler の問題が置き換えられる時を解いた
1815	Lagrange	固定点の慣性楕円体が $A = B$ で軸が重心を通る時
	Poisson	
1851	Poinsot	Euler 問題を幾何学的に解く
1889	Mme Kovaleski	$A = B = 2C$
19–	Andoyer	Andoyer con. var. の発見

3.2 剛体の変位

3.2.1 固定軸の回りの回転による変位

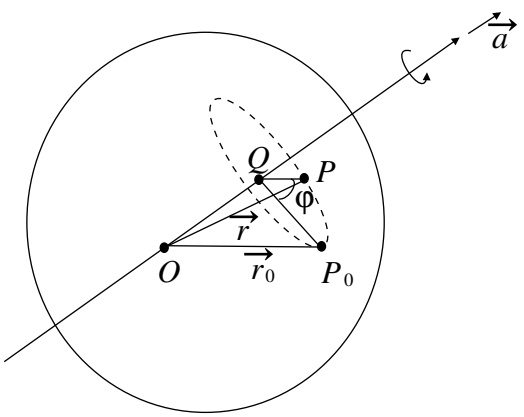

Figure 14: 固定軸の回りの回転

$$\vec{r} = q\vec{r}_0 q^{-1} \tag{122}$$

$$q = \cos\frac{\varphi}{2} + \vec{a}\sin\frac{\varphi}{2} \tag{123}$$

$$q^{-1} = \cos\frac{\varphi}{2} - \vec{a}\sin\frac{\varphi}{2} \tag{124}$$

$$qq^{-1} = \cos^2\frac{\varphi}{2} - \vec{a}^2 \sin\frac{\varphi}{2} \tag{125}$$

$$\vec{a}\vec{b} = \vec{a}\cdot\vec{b} + \vec{a}\times\vec{b} = \mathrm{S}\vec{a}\vec{b} + \mathrm{V}\vec{a}\vec{b}$$

より，

$$\vec{a}\vec{a} = \mathrm{S}\vec{a}\vec{a} = -|\vec{a}|^2 = -1 \tag{126}$$

よって，

$$qq^{-1} = 1 \tag{127}$$

$$\vec{r}_0 q^{-1} = \vec{r}_0 \cos\frac{\varphi}{2} - \vec{r}_0\vec{a}\sin\frac{\varphi}{2} \tag{128}$$

$$\begin{aligned} q\vec{r}_0 q^{-1} &= \vec{r}_0\cos^2\frac{\varphi}{2} - \vec{a}\vec{r}_0\vec{a}\sin^2\frac{\varphi}{2} + \underbrace{(\vec{a}\vec{r}_0 - \vec{r}_0\vec{a})}_{2\mathrm{V}\vec{a}\vec{r}_0}\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2} \\ &= \mathrm{V}\vec{a}\vec{r}_0\sin\varphi + \vec{r}_0\cos^2\frac{\varphi}{2} - \vec{a}\vec{r}_0\vec{a}\sin^2\frac{\varphi}{2} \end{aligned} \tag{129}$$

変位 $\Delta\vec{r}$ は，

$$\begin{aligned} \Delta\vec{r}_0 &= \vec{r} - \vec{r}_0 \\ &= \mathrm{V}\vec{a}\vec{r}_0\sin\varphi - (\vec{r}_0 + \vec{a}\vec{r}_0\vec{a})\sin^2\frac{\varphi}{2} \end{aligned} \tag{130}$$

無限小回転では，

$$d\vec{r}_0 = d\varphi\mathrm{V}\vec{a}\cdot\vec{r}_0 + \mathcal{O}(d\varphi^2) \tag{131}$$

$$\dot{\vec{r}} = \left.\frac{d\vec{r}}{dt}\right|_{\vec{r}=\vec{r}_0} = \dot{\varphi}\mathrm{V}\vec{a}\cdot\vec{r}_0 = \mathrm{V}(\vec{a}\dot{\varphi})\cdot\vec{r}_0 = \mathrm{V}\vec{\omega}\vec{r}_0 \tag{132}$$

$\vec{\omega}$：角速度ベクトル
よって，

$$\dot{\vec{r}}_0 = \mathrm{V}\vec{\omega}\cdot\vec{r}_0 \tag{133}$$

となる[11]

3.2.2 剛体の変位 (一般的)

平行移動する基準点 O に回転ベクトル $\vec{a}$，回転角 φ は存在しない事を示そう．’

[11] これは良く知られた結果，

$$\vec{F} \propto \vec{\omega}\times\vec{r}$$

に導く．

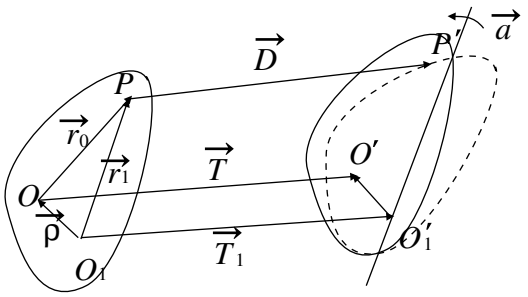

Figure 15: 剛体の変位 (一般的)

$$\vec{D} = \vec{T} + q\vec{r}_0 q^{-1} - \vec{r}_0, \quad q = \cos\frac{\varphi}{2} + \vec{a}\sin\frac{\varphi}{2} \tag{134}$$

別の点 O_1 について行うと，

$$\vec{D}_1 = \vec{T}_1 + a\vec{r}_1 q^{-1} - \vec{r}_1 \tag{135}$$

とおくと，

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_0 + \vec{\rho} \tag{136}$$

$$\vec{T}_1 = \vec{T}_0 + q(-\vec{\rho})q^{-1} + \vec{\rho} \tag{137}$$

よって，

$$\vec{D}_1 = \vec{T} + q\vec{r}_0 q^{-1} - \vec{r}_0 = \vec{D} \tag{138}$$

さらに，次の定理が分かっている．

剛体の任意の変位は適当な $\mathrm{screw}\ (\vec{T}\|\vec{a})$ で表される．

いま，

$$\vec{D} = \vec{T} + q\vec{r}q^{-1} - \vec{r}, \quad q = \cos\frac{\varphi}{2} + \vec{a}\sin\frac{\varphi}{2} \tag{139}$$

O を ρ だけずらすと，

$$\vec{T}_1 = \vec{T} + q\vec{\rho}q^{-1} - \vec{\rho} \tag{140}$$

$\mathrm{V}\vec{a}\vec{T}_1 = 0$ にするには，

$$\mathrm{V}\vec{a}\vec{\rho} = \mathrm{V}\vec{a}q\vec{\rho}q^{-1} = \mathrm{V}\vec{a}\vec{T} \tag{141}$$

であればよい．q は $\vec{a}$ で generate されているから，

$$q\vec{a} = \vec{a}q \tag{142}$$

$$\mathrm{V}qpq^{-1} = \mathrm{V}q(\mathrm{S}p + \mathrm{V}p)q^{-1} = \mathrm{V}q(\mathrm{S}p)q^{-1} + \mathrm{V}q(\mathrm{V}p)q^{-1} = \underbrace{\mathrm{V}(\mathrm{S}p)}_{=0} + \mathrm{V}q(\mathrm{V}p)q^{-1} \tag{143}$$

さて[12] ，

$$q\vec{\rho}_1 = (\mathrm{S}q + \mathrm{V}q)\vec{\rho}_1 = \vec{\rho}_1\mathrm{S}q + (\mathrm{V}q)\vec{\rho}_1 = \vec{\rho}_1(\mathrm{S}q - \mathrm{V}q) = \vec{\rho}_1 q^{-1} \tag{144}$$

よって，

$$(1 - q^2)\vec{\rho}_1 = \vec{T}_1, \quad \vec{\rho}_1 = (1 - q^2)^{-1}\vec{T}_1 \tag{145}$$

別に，

$$1 - q^2 = 1 - (\cos\varphi + \vec{a}\sin\varphi) = 2\sin^2\frac{\varphi}{2} - \vec{a}\sin\varphi = 2\underbrace{\vec{a}\sin\frac{\varphi}{2}}_{\mathrm{V}q}\underbrace{\left(-\vec{a}\sin\frac{\varphi}{2} + \cos\frac{\varphi}{2}\right)}_{=q^{-1}} = 2(\mathrm{V}q)q^{-1} \tag{146}$$

よって，

$$(1 - q^2)^{-1} = \left(2(\mathrm{V}q)q^{-1}\right)^{-1} = q\frac{1}{2}(\mathrm{V}q)^{-1} = \frac{1}{2}(\mathrm{V}q)^{-1}q \quad (qf(q) = f(q)q) \tag{147}$$

$$\vec{\rho}_1 q - q\vec{\rho}_1 = \vec{T}_1 q \tag{148}$$

さて，

$$[p, q] = 2\mathrm{V}\mathrm{V}p\mathrm{V}q \equiv [\mathrm{V}p, \mathrm{V}q] \tag{149}$$

$$\begin{aligned} pq - qp &= (\mathrm{S}p + \mathrm{V}p)(\mathrm{S}q + \mathrm{V}q) - (\mathrm{S}q + \mathrm{q})(\mathrm{S}p + \mathrm{V}p) \\ &= \mathrm{S}p\mathrm{S}q + \mathrm{V}p\mathrm{S}q + \mathrm{S}p\mathrm{V}q + \mathrm{V}p\mathrm{V}q - \mathrm{S}q\mathrm{S}p - \mathrm{V}q\mathrm{S}p - \mathrm{S}q\mathrm{V}p - \mathrm{V}q\mathrm{V}p \\ &= \mathrm{V}p\mathrm{V}q - \mathrm{V}q\mathrm{V}p \\ &= (\mathrm{S}\mathrm{V}p\mathrm{V}q + \mathrm{V}\mathrm{V}p\mathrm{V}q) - (\mathrm{S}\mathrm{V}q\mathrm{V}p + \mathrm{V}\mathrm{V}q\mathrm{V}p) \\ &= 2\mathrm{V}\mathrm{V}p\mathrm{V}q \end{aligned} \tag{150}$$

ここで，

$$\mathrm{S}p\mathrm{S}q = \mathrm{S}q\mathrm{S}p, \quad \mathrm{V}p\mathrm{S}q = \mathrm{S}q\mathrm{V}p, \quad \mathrm{S}ab = \mathrm{S}ba, \quad \mathrm{V}ab = -\mathrm{V}ba \tag{151}$$

を用いた．

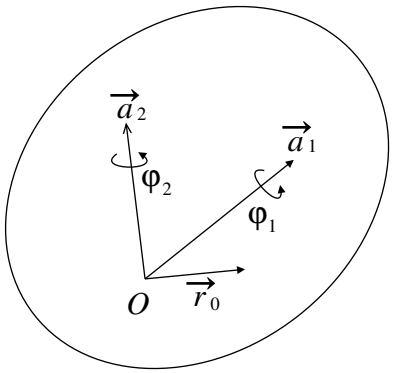

Figure 16: 固定点の回りの回転

3.3 固定点の回りの運動

3.3.1 角速度

$\vec{a}_1$ の 回りに φ_1 回転した後，$\vec{a}_2$ の回りに φ_2 回転しよう．

$$\vec{r}_1 = q_1\vec{r}_0q_1^{-1}, \quad \vec{r}_2 = q_2\vec{r}_1q_1^{-1}, \quad q_j = \cos\frac{\varphi_j}{2} + \vec{a}_j\sin\frac{\varphi_j}{2} \tag{152}$$

よって，

$$\vec{r}_2 = q_2q_1\vec{r}_0q_1^{-1}q_2^{-1} \tag{153}$$

$q_2q_1 = q$ とおくと，$q_1^{-1}q_2^{-1} = (q_2q_1)^{-1=q^{-1}}$ よって，

$$\vec{r}_2 = q\vec{r}_0q^{-1} \tag{154}$$

$$\begin{aligned} q &= \left(\cos\frac{\varphi_2}{2} + \vec{a}_2\sin\frac{\varphi_2}{2}\right)\left(\cos\frac{\varphi_1}{2} + \vec{a}_1\sin\frac{\varphi_1}{2}\right) \\ &= \cos\frac{\varphi_2}{2}\cos\frac{\varphi_1}{2} + \vec{a}_2\sin\frac{\varphi_2}{2}\cos\frac{\varphi_1}{2} + \vec{a}_1\sin\frac{\varphi_1}{2}\cos\frac{\varphi_2}{2} + \sin\frac{\varphi_2}{2}\sin\frac{\varphi_1}{2}\vec{a}_2\vec{a}_1 \\ &= \left[\cos\frac{\varphi_2}{2}\cos\frac{\varphi_1}{2} + (\mathrm{S}\vec{a}_2\vec{a}_1)\sin\frac{\varphi_2}{2}\sin\frac{\varphi_1}{2}\right] + \sin\frac{\varphi_2}{2}\cos\frac{\varphi_1}{2}\vec{a}_2 + \sin\frac{\varphi_1}{2}\cos\frac{\varphi_2}{2}\vec{a}_1 \\ &\quad + \sin\frac{\varphi_2}{2}\sin\frac{\varphi_1}{2}\mathrm{V}\vec{a}_2\vec{a}_1 \end{aligned} \tag{155}$$

さて，$q_1q_2 = q'$ とおくと，$q_1q_2 \neq q_2q_1$ (等号は $\vec{a}_2 = \vec{a}_1$ の時だけ)．つまり，

有限回転は順序に依存する．

無限小回転

$$\vec{r}_1 = q_1\vec{r}_0q_1^{-1} \quad \left(q_1 = 1 + \frac{\varphi_1}{2}\vec{a}_1 + \mathcal{O}(\varphi_1^2)\right)$$

[12] $\vec{\rho}_1 \perp \mathrm{V}q (\|\vec{a})$ より $(\mathrm{V}q)\rho_1 = -\rho_1(\mathrm{V}q)$

$$
\begin{aligned}
&= \left(1+\frac{\varphi_1}{2}\vec{a}_1\right)\vec{r}_0\left(1-\frac{\varphi_1}{2}\vec{a}_1\right)\\
&= \vec{r}_0+\frac{\varphi_1}{2}\left(\vec{a}_1\vec{r}_0-\vec{r}_0\vec{a}_1\right)+\mathcal{O}(\varphi_1^2)\quad (pq-pq=2\mathrm{VV}p\mathrm{V}q)\\
&\quad \vec{r}_0+\varphi_1\mathrm{V}\vec{a}_1\vec{r}_0+\mathcal{O}(\varphi_1^2)
\end{aligned}
\tag{156}
$$

よって，

$$
\begin{aligned}
\vec{r}_2 &= \vec{r}_1+\mathrm{V}\vec{a}_2\vec{r}_1+\mathcal{O}(\varphi_2^2)\\
&= \vec{r}_0+\varphi_1\mathrm{V}\vec{a}_1\vec{r}_0*\varphi_2\mathrm{V}\vec{a}_2\vec{r}_0+\mathcal{O}(\text{二次})
\end{aligned}
\tag{157}
$$

無限小回転は順序によらない．

無限小回転において，

$$
d\varphi_j\vec{a}_j=\vec{\omega}_j dt,\quad d(\vec{r}_2-\vec{r}_0)=\dot{\vec{r}}_0dt \tag{158}
$$

とおくと，

$$
\dot{\vec{r}}_0=\mathrm{V}\vec{\omega}_1\vec{r}_0+\mathrm{V}\vec{\omega}_2\vec{r}_0=\mathrm{V}\vec{\omega}\vec{r}_0,\quad \vec{\omega}=\vec{\omega}_1+\vec{\omega}_2 \tag{159}
$$

このように，角速度 $\vec{\omega}$ はベクトルであり，合成できる (無限小回転)．

3.3.2　角運動量と運動エネルギー

$$
\vec{G}=\sum m\mathrm{V}\vec{r}\dot{\vec{r}}=\sum m\mathrm{V}\vec{r}\mathrm{V}\vec{\omega}\vec{r}\quad ;\quad \text{角運動量} \tag{160}
$$

ここで，

$$
\mathrm{V}\alpha(\mathrm{V}\beta\gamma)=\mathrm{V}\alpha(\beta\gamma-\mathrm{S}\beta\gamma)=\mathrm{V}\alpha\beta\gamma=\alpha\mathrm{S}\beta\gamma-\beta\mathrm{S}\gamma\alpha,\quad \mathrm{S}\gamma\alpha=-\gamma\cdot\alpha \tag{161}
$$

より，

$$
\vec{G}=\sum m\left[\vec{r}\mathrm{S}\vec{\omega}\vec{r}+\vec{\omega}r^2\right] \tag{162}
$$

O を原点とする剛体に固定された軸 i,j,k をとる．

$$
\vec{\omega} = \omega_1 i+\omega_2 j+\omega_3 k \tag{163}
$$

$$
\vec{r} = \xi i+\eta j+\zeta k \tag{164}
$$

すると，

$$
\mathrm{S}\vec{\omega}\vec{r}=-\omega_1\xi-\omega_2\eta-\omega_3\zeta \tag{165}
$$

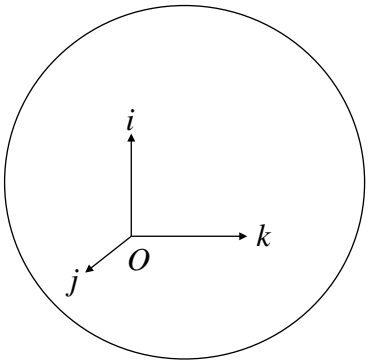

Figure 17: i, j, k

よって，

$$\begin{aligned}\vec{G} &= \left[\sum mr^2\omega_2 - \sum m\xi(\omega_1\xi+\omega_2\eta+\omega_3\zeta)\right] i \\ &\quad + \left[\sum mr^2\omega_2 - \sum m\eta(\omega_1\xi+\omega_2\eta+\omega_3\zeta)\right] j \\ &\quad + \left[\sum mr^2\omega_3 - \sum m\zeta(\omega_1\xi+\omega_2\eta+\omega_3\zeta)\right] k \end{aligned} \tag{166}$$

$r^2 = \xi^2+\eta^2+\zeta^2$ より，

$$G_j = \sum m(\delta_{kl}-\delta_{jl})r_k r_l \tag{167}$$

慣性積をつかって，

$$\begin{aligned}\vec{G} &= (A\omega_1 - F\omega_2 - E\omega_3)i \\ &\quad +(B\omega_2 - D\omega_3 - F\omega_1)j \\ &\quad +(C\omega_3 - E\omega_1 - D\omega_2)k \end{aligned} \tag{168}$$

同じ様に運動エネルギーについて[13] ，

$$\begin{aligned} T &= -\frac{1}{2}\sum m\mathrm{S}\dot{\vec{r}}\dot{\vec{r}} = -\frac{1}{2}\sum m\mathrm{S}\dot{\vec{r}}\mathrm{V}\vec{\omega}\vec{r} = -\frac{1}{2}\sum m\mathrm{S}\vec{\omega}\vec{r}\dot{\vec{r}} \\ &= -\frac{1}{2}\mathrm{S}(\vec{\omega}\sum m\vec{r}\dot{\vec{r}}) = -\frac{1}{2}\mathrm{S}(\vec{\omega}\sum m\mathrm{V}\vec{r}\dot{\vec{r}}) = -\frac{1}{2}\mathrm{S}\vec{\omega}\vec{G} \qquad (169) \\ &= \frac{1}{2}(A\omega_1^2+B\omega_2^2+C\omega_3^2) - (D\omega_2\omega_3+E\omega_3\omega_1+F\omega_1\omega_2) \qquad (170)\end{aligned}$$

一方 $\dot{\vec{r}} = \mathrm{V}\vec{\omega}\vec{r}$ を同時に代入して，

$$2T = -\sum m\mathrm{SV}\vec{\omega}\vec{r}\mathrm{V}\vec{\omega}\vec{r} \tag{171}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{SV}\vec{\omega}\vec{r}\mathrm{V}\vec{\omega}\vec{r} &= \mathrm{S}\vec{\omega}\vec{r}\mathrm{V}\vec{\omega}\vec{r} = -\mathrm{S}\vec{\omega}\vec{r}\mathrm{V}\vec{r}\vec{\omega} \\ &= -\mathrm{S}\vec{\omega}\vec{r}(\vec{r}\vec{\omega}-\mathrm{S}\vec{r}\vec{\omega}) = -\vec{r}^2\vec{\omega}^2 + (\mathrm{S}\vec{\omega}\vec{r})^2 \end{aligned} \tag{172}$$

[13] $\mathrm{S}\vec{a}\vec{b} = -\vec{a}\cdot\vec{b}$

よって，

$$2T = \sum m[\omega^2 r^2 - (\mathrm{S}\vec{\omega}\vec{r})^2] = \sum m\omega^2[r^2 - (\mathrm{S}\vec{r}\mathrm{U}\vec{\omega})^2] = \omega^2 \sum m\omega^2 p^2 = \omega^2 I_\omega \tag{173}$$

ここで I_ω は $\vec{\omega}$ 方向の慣性モーメント．

$$I_\omega = A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2 - 2(D\omega_2\omega_3 + E\omega_3\omega_2 + F\omega_1\omega_2) \tag{174}$$

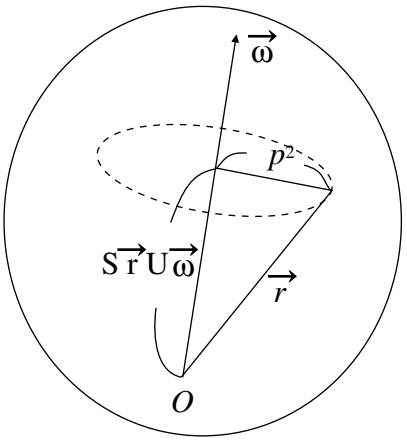

Figure 18: $\mathrm{S}\vec{r}\mathrm{U}\vec{\omega}, p^2, \vec{r}$

3.3.3 i, j, k を慣性主軸にとる

$$\vec{G} = A\omega_1 i + B\omega_2 j + C\omega_3 \tag{175}$$

i, j, k も剛体と共に動くから[14] ，

$$\dot{\vec{G}} = \underbrace{A\dot{\omega}_1 i + B\dot{\omega}_2 j + C\dot{\omega}_3 k}_{\frac{\partial G}{\partial t}} + \underbrace{A\omega_1 \mathrm{V}\vec{\omega} i + B\omega_2 \mathrm{V}\vec{\omega} + C\omega_3 \mathrm{V}\vec{\omega} k}_{\mathrm{V}\vec{\omega}\vec{G}} \tag{176}$$

よって，

$$\dot{\vec{G}} = \frac{\partial G}{\partial t} + \mathrm{V}\vec{\omega}\vec{G} \tag{177}$$

$\mathrm{V}\vec{\omega}\vec{G}$; **遠心偶力** (centrifugal couple)

$\mathrm{V}\vec{\omega} i = -\omega_2 k + \omega_3 j$ などにより，

$$\begin{aligned} \dot{\vec{G}} &= [A\dot{\omega}_1 + (C - B)\omega_2\omega_3]\, i + [B\dot{\omega}_2 + (A - C)\omega_3\omega_1]\, j \\ &\quad + [C\dot{\omega}_3 + (B - A)\omega_1\omega_2]\, k \end{aligned} \tag{178}$$

[14] $\dot{\vec{r}} = \mathrm{V}\vec{\omega}\vec{r}$

遠心力 (Centrifugal Couple) について
遠心力：

$$\vec{f} = mp^2\omega^2 \mathrm{U}\vec{f}, \quad \mathrm{U}\vec{f} = \mathrm{V}\vec{a}\mathrm{V}\vec{a}^{-1}\vec{r} = -\mathrm{V}\vec{a}\mathrm{V}\vec{a}\vec{r} \tag{179}$$

よって[15] ，

$$\vec{f} \;=\; -m\omega^2\mathrm{V}\vec{a}\mathrm{V}\vec{a}\vec{r} = m\mathrm{V}\vec{\omega}\mathrm{V}\vec{\omega}\vec{r} = m\vec{\omega}\mathrm{S}\vec{\omega}\vec{r} + m\omega^2\vec{r} \tag{180}$$

$$\mathrm{V}\vec{r}\vec{f} = m\mathrm{S}\vec{r}\vec{\omega}\mathrm{V}\vec{\omega}\vec{r} \tag{181}$$

一方，

$$\dot{\vec{G}} \;=\; \sum m\mathrm{V}\vec{r}\mathrm{V}\vec{\omega}\vec{R} = \sum \left(m\vec{\omega}r^2 + m\vec{r}\mathrm{S}\vec{\omega}\vec{r}\right) \tag{182}$$

$$\mathrm{V}\vec{\omega}\vec{G} \;=\; \sum m\mathrm{V}\vec{\omega}\vec{r}\mathrm{S}\vec{\omega}\vec{r} = -\sum \mathrm{V}\vec{r}\vec{f} \tag{183}$$

よって $\mathbf{V}\vec{\omega}\vec{G}$ は遠心力に依存する **term** である．これは回転軸の移動による結果である．
Euler の運動方程式

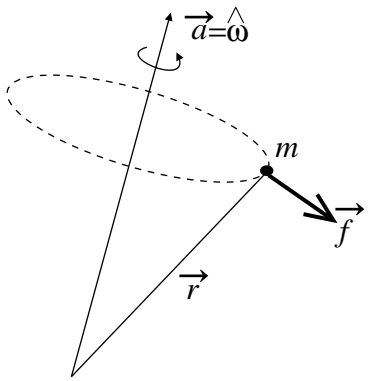

Figure 19: 遠心力

$\dot{\vec{G}} = \vec{N}$ の表式

$$\begin{cases} A\dot{\omega}_1 + (C-B)\omega_2\omega_3 = N_1 \\ B\dot{\omega}_2 + (A-C)\omega_3\omega_1 = N_2 \\ C\dot{\omega}_3 + (B-A)\omega_1\omega_2 = N_3 \end{cases} \tag{184}$$

これは一般には解けない．天体力学では重心を O にとって $\vec{N} = \mathrm{grad}\Phi$，$A \sim B \sim C$ 等の条件などによりいろいろと解ける．
これは3階の方程式である．実は6階の方程式でないと運動は解けない．後の3階は $\dot{\psi}, \dot{\varphi}, \dot{v\theta}$ と $\vec{\omega}$ の関係である．さて，

[15] $\vec{\omega} = \omega\hat{\omega} = \omega\vec{a}$

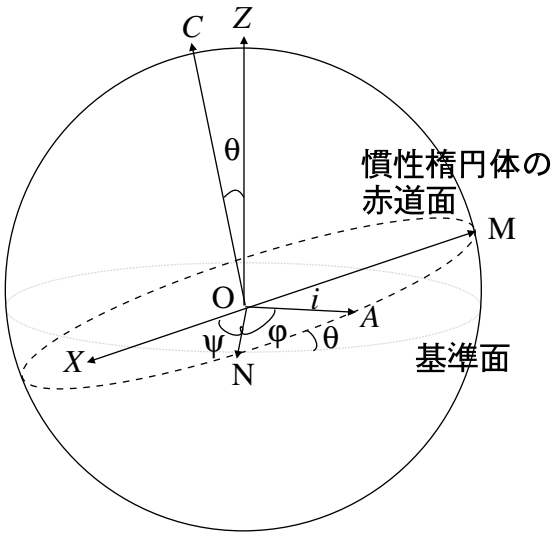

Figure 20: 慣性楕円体の赤道面と基準面

$$\vec{\omega} = \omega_1 i + \omega_2 j + \omega_3 k \tag{185}$$

一方，

$$\vec{\omega} = \dot{\psi}\mathrm{OZ} + \dot{\theta}\mathrm{ON} + \dot{\varphi}\mathrm{OC} \tag{186}$$

ここで，

$$\begin{aligned}
i &= (\mathrm{OC})^{\frac{2}{\pi}\varphi}\mathrm{ON} = (\cos\varphi + \mathrm{OC}\sin\varphi)\mathrm{ON} = \cos\varphi\cdot\mathrm{ON} + \sin\varphi\cdot\mathrm{OM} && (187)\\
j &= ki = \mathrm{OC}\cdot i = \cos\varphi\cdot\mathrm{OM} - \sin\varphi\cdot\mathrm{ON} && (188)\\
k &= \mathrm{OC} && (189)\\
\mathrm{OZ} &= (\mathrm{ON})^{\frac{2}{\pi}(-\varphi)}\mathrm{OC} = \cos\theta\cdot\mathrm{OC} + \sin\theta\mathrm{OM} && (190)
\end{aligned}$$

代入すると，

$$\begin{aligned}
\vec{\omega} &= \omega_1(\cos\varphi\cdot\mathrm{ON} + \sin\varphi\cdot\mathrm{OM}) + \omega_2(\cos\varphi\cdot\mathrm{OM} - \sin\varphi\cdot\mathrm{ON}) + \omega_3\mathrm{OC}\\
&= \dot{\psi}(\cos\theta\cdot\mathrm{OC} + \sin\theta\mathrm{OM}) + \dot{\theta}\cdot\mathrm{ON} + \dot{\varphi}\cdot\mathrm{OC} && (191)
\end{aligned}$$

比較して，

$$\left.\begin{aligned}
&\mathrm{ON};\quad \dot{\theta} = \omega_1\cos\varphi - \omega_2\sin\varphi\\
&\mathrm{OM};\quad \sin\theta\dot{\psi} = \omega_1\sin\varphi + \omega_2\cos\varphi\\
&\mathrm{OC};\quad \dot{\varphi} + \dot{\psi}\cos\theta = \omega_3\\
&\qquad\quad \dot{\psi} = -(\omega_1\sin\varphi + \omega_2\cos\varphi)\mathrm{cet}\theta + \omega_3
\end{aligned}\right\} \tag{192}$$

一般には (184) を解いて $\vec{\omega}$ を求め，(192) を用いて (ψ, θ, φ) を求めるわけであるが，これは結構複雑になる．

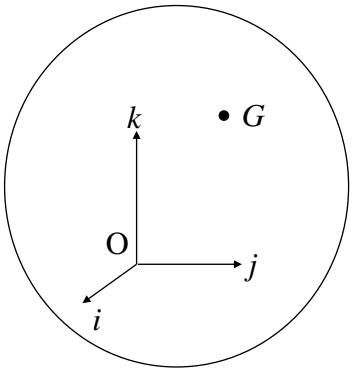

Figure 21: 剛体に固定した座標系

3.3.4 $\vec{N} = M\mathrm{V}\vec{r}_G\vec{g}$ の場合

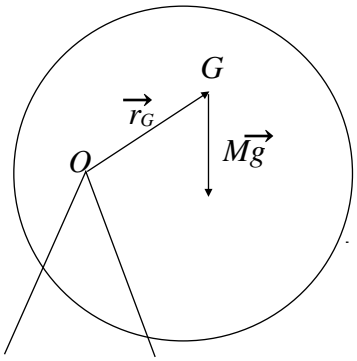

Figure 22: $\vec{N} = M\mathrm{V}\vec{r}_G\vec{g}$

O で支持された一様重力下のコマ．

$$\dot{\vec{G}} = M\mathrm{V}\vec{r}_G\vec{g} \tag{193}$$

まず[16] ，

$$\mathrm{S}\vec{\omega}\dot{\vec{G}} = M\mathrm{S}\vec{\omega}\mathrm{V}\vec{r}_G\vec{g} = M\mathrm{S}\vec{\omega}\vec{r}_G\vec{g} = M\mathrm{S}\left((\mathrm{V}\vec{\omega}\vec{r}_G)\,\vec{g}\right) = M\mathrm{S}(\dot{\vec{r}}_G\vec{g}) = \frac{d}{dt}\left(M\mathrm{S}\vec{r}_G\vec{g}\right) \tag{194}$$

一方，

$$\begin{aligned}\mathrm{S}\vec{\omega}\dot{\vec{G}} &= -\left[A\omega_1\dot{\omega}_1 + B\omega_2\dot{\omega}_2 + C\omega_3\dot{\omega}_3\right] \\ &= -\frac{d}{dt}\frac{1}{2}\left(A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2\right) = -\dot{T}\end{aligned} \tag{195}$$

[16] $\dot{\vec{r}} = \mathrm{V}\vec{\omega}\vec{r}$, $\frac{d\vec{g}}{dt} = 0$

[注意]

$$T = -\frac{1}{2}\mathrm{S}\vec{\omega}\vec{G}, \quad \dot{T} = -\frac{1}{2}\left(\mathrm{S}\dot{\vec{\omega}}\vec{G} + \vec{\omega}\dot{\vec{G}}\right) = -\mathrm{S}\vec{\omega}\dot{\vec{G}} \tag{196}$$

したがって，

$$\mathrm{S}\dot{\vec{\omega}}\vec{G} = \mathrm{S}\vec{\omega}\dot{\vec{G}} \tag{197}$$

よって，

$$\underbrace{\frac{1}{2}\left(A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2\right)}_{\text{運動エネルギー}} + M \underbrace{\mathrm{S}\vec{r}_G\vec{g}}_{hg:\text{位置エネルギー}} = \text{const.} \tag{198}$$

これはエネルギー積分．さて，(193) で鉛直上向きを k_0 とすると，

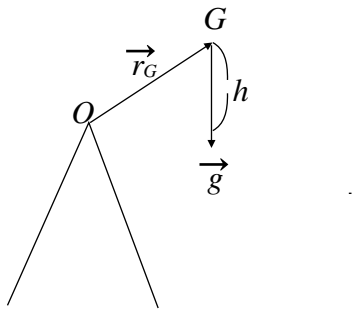

Figure 23: 位置エネルギー

$$\mathrm{S}\dot{\vec{G}}k_0 = M\mathrm{S}(\mathrm{V}\vec{r}_G\vec{g})k_0 = M\mathrm{S}\vec{r}_G\mathrm{V}(\vec{g}k_0) = 0 \quad (\vec{g}\|k_0) \tag{199}$$

よって，

$$\mathrm{S}\vec{G}k_0 = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad \text{角運動量の } z \text{ 成分} \tag{200}$$

慣性主軸に対する k_0 の方向余弦を $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ とすれば，

$$A\omega_1\gamma_1 + B\omega_2\gamma_2 + C\omega_3\gamma_3 = \text{const.} \tag{201}$$

知られている積分はこの 2 つだけである．さまざまな場合

Euler の場合 O が G と一致

Lagrange の場合 中心楕円体が軸対称，O が対称軸上にある．$A = B \neq C$

Kovalevski の場合 中心楕円体が軸対称，O は赤道面内，$A = B = 2C$

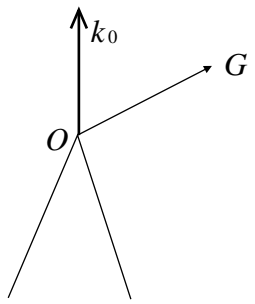

Figure 24: k_0

3.3.5 支持点 O に働く束縛力

O を支えるのに必要な力は？

$$M\ddot{\vec{r}}_G = M\vec{G} + \vec{R}, \quad \vec{R} : \mathrm{O} \text{ に働く束縛力} \tag{202}$$

この束縛力は剛体のどの点に対しても同じ力が働く．さて[17] ，

$$\dot{\vec{r}}_G = \mathrm{V}\vec{\omega}\vec{r}_G, \quad \ddot{\vec{r}}_G = \mathrm{V}\dot{\vec{\omega}}\vec{r}_G + \mathrm{V}\vec{\omega}(\mathrm{V}\vec{\omega}\vec{r}_G) \tag{203}$$

$$\dot{\vec{\omega}} = \dot{\omega}_1 i + \dot{\omega}_2 j + \dot{\omega}_3 + \underbrace{\omega_1 \mathrm{V}\vec{\omega} i + \omega_2 \mathrm{V}\vec{\omega} j + \omega_3 \mathrm{V}\vec{\omega} k}_{=0}, \quad \dot{i} = \mathrm{V}\vec{\omega}\vec{i} \tag{204}$$

$\mathrm{V}\vec{\omega} i = \omega_2 k - \omega_3 j$ などにより，結局，

$$\dot{\vec{\omega}} = \sum_{i,j,k} \left(\frac{B-C}{A} \omega_2 \omega_3 + \frac{N_1}{A} \right) i \tag{205}$$

一方，

$$\vec{r}_G \bar{\xi} i + \bar{\eta} j + \bar{\zeta} k \tag{206}$$

と書くと，

$$\mathrm{V}\dot{\vec{\omega}}\vec{r}_G = \sum_{i,j,k} \left[\left(\frac{C-A}{B} \omega_3 \omega_1 + \frac{N_2}{B} \right) \bar{\zeta} - \left(\frac{A-B}{C} \omega_1 \omega_2 + \frac{N_3}{C} \right) \bar{\eta} \right] i \tag{207}$$

さて，

$$\begin{aligned} \mathrm{V}\vec{\omega}\mathrm{V}\vec{\omega}\vec{r}_G &= \omega^2 \vec{r}_G \vec{\omega} \mathrm{S} \vec{\omega} \vec{r}_G \\ &= \sum \left[\omega_1 (\omega_2 \bar{\xi} + \omega_2 \bar{\eta} + \omega_3 \bar{\zeta}) - \bar{\xi}(\omega_1^2 + \omega_2^2 + \omega_3^2) \right] i \\ &= \sum \left[\omega_1 (\omega_2 \bar{\eta} + \omega_3 \bar{\zeta}) - \bar{\xi}(\omega_2^2 + \omega_3^2) \right] i \end{aligned} \tag{208}$$

[17] $\vec{r}_G$ は剛体に固定されていないから，$\vec{a} = \mathrm{V}\vec{\omega}\vec{a}$ とはいかない．

結局，

$$\begin{aligned}
\vec{R} &= -M\vec{g} + M\sum\Big[\Big(\frac{C-A}{B}\omega_3\bar{\zeta} - \frac{A-B}{C}\omega_2\bar{\eta}\Big)\omega_1 \\
&\quad + \omega_1(\omega_2\bar{\eta} + \omega_3\bar{\zeta}) - \bar{\xi}(\omega_2^2+\omega_3^2)\Big]i + M\sum\Big(\frac{N_2}{B}\bar{\zeta} - \frac{N_3}{C}\bar{\eta}i\Big) \qquad (209)\\
N_1 &= -M\mathrm{S}(\mathrm{V}\vec{r}_G\vec{g})i = Mg(\gamma_2\bar{\zeta} - \gamma_3\bar{\eta}) \qquad (210)\\
N_2 &= -M\mathrm{S}(\mathrm{V}\vec{r}_G\vec{g})j = Mg(\gamma_3\bar{\xi} - \gamma_1\bar{\zeta}) \qquad (211)\\
N_3 &= -M\mathrm{S}(\mathrm{V}\vec{r}_G\vec{g})k = Mg(\gamma_1\bar{\eta} - \gamma_2\bar{\xi}) \qquad (212)
\end{aligned}$$

重心以外の点が支持点になるとよけいな力がいる．
$\vec{N}=0$ の場合

$$\begin{cases} \dot{\vec{G}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{G} = \text{const.} \\ \dot{T} = \mathrm{S}\vec{\omega}\vec{G} = 0 \quad \Rightarrow \quad T = \text{const.} \end{cases} \qquad (213)$$

そこで，

$$A\omega_1 i + B\omega_2 j + C\omega_3 k = \text{const.} \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{l} A^2\omega^2 + B^2\omega_2^2 + C^2\omega_3^2 = G^2 \\ A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2 = 2h \end{array}\right\} \qquad (214)$$

ω_2 で表そう．

$$G^2 - 2Ah = B(B-A)\omega_2^2 + C(C-A)\omega_3^2 \qquad (215)$$

よって，

$$\begin{aligned}
\omega_3 &= \pm\sqrt{\frac{1}{C(C-A)}\left[G^2 - 2Ah - B(B-A)\omega_2^2\right]} \qquad (216)\\
\omega_1 &= \pm\sqrt{\frac{1}{A(A-C)}\left[G^2 - 2Ch - B(B-C)\omega_2^2\right]} \qquad (217)
\end{aligned}$$

$\vec{N}=0$ より，

$$B\dot{\omega}_2 + (A-C)\omega_1\omega_3 = 0 \qquad (218)$$

代入すると，

$$\dot{\omega}_2 = \pm\sqrt{-\frac{1}{AC}\left[\frac{G^2-2Ah}{B} - (B-A)\omega_2^2\right]\left[\frac{G^2-2Ch}{B} - (B-C)\omega_2^2\right]} \qquad (219)$$

$$dt = \pm\int \frac{d\omega_2}{\sqrt{-\frac{1}{AC}\left[\frac{G^2-2Ah}{B} - (B-A)\omega_2^2\right]\left[\frac{G^2-2Ch}{B} - (B-C)\omega_2^2\right]}} \qquad (220)$$

右辺は楕円関数である[18] ．$A \leq B \leq C$ と仮定しよう．すると，

$$G^2 - 2Ah > 0 > G^2 - 2Ch, \quad B - A > 0 > B - C \tag{221}$$

よって，

$$\begin{aligned} & \int \frac{d\omega_2}{\sqrt{-\frac{1}{AC}\left[\frac{G^2-2Ah}{B} - (B-A)\omega_2^2\right]\left[\frac{G^2-2Ch}{B} - (B-C)\omega_2^2\right]}} \\ = & \sqrt{\frac{-ACB^2}{(G^2-2Ah)(G^2-2Ch)}} \int \frac{d\omega_2}{\sqrt{(1-k_A^2\omega_2^2)(1-k_C^2\omega_2^2)}} \\ & k_A^2 = \frac{B(B-A)}{G^2-2Ah} > 0, \quad k_C^2 = \frac{B(B-C)}{G^2-2Ch} > 0 \end{aligned} \tag{222}$$

$$|\omega_2| \leq \max\left(\frac{1}{k_A}, \frac{1}{k_C}\right) \tag{223}$$

$k_A\omega_2 = u$ とすると，

$$\int \frac{d\omega_2}{(1-u^2)(1-k^2u^2)} \propto \int dt \tag{224}$$

これより $u = \mathrm{sn}(t,k), k = \frac{k_C}{k_A}$ ．
D と ω_G

$$\begin{cases} 2h = 2T = -rs\vec{\omega}\vec{G} \equiv \omega_G\vec{G}, \quad \omega_G : \vec{\omega}\text{の}\vec{G}\text{方向の成分} \\ G \equiv \omega_G D, \quad D : \omega_G\text{方向の慣性能率} \end{cases} \tag{225}$$

$$2h = D\omega_G^2 \tag{226}$$

$$G = D\omega_G \tag{227}$$

この ω_G と D を使うと，

$$A\omega_1^2 + C\omega_3^2 = D\omega_G^2 - B\omega_2^2, \quad A^2\omega_1^2 + C^2\omega_3^2 = D^2\omega_G^2 - B^2\omega_2^2 \tag{228}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} A & C \\ A^2 & C^2 \end{vmatrix} = AC(C-A) \tag{229}$$

これより，

$$\omega_1^2 = \frac{1}{AC(C-A)} \begin{vmatrix} D\omega_G^2 - B\omega_2^2 & C \\ D^2\omega_G^2 - B^2\omega_3^2 & C^2 \end{vmatrix}$$

[18] $A = B$ なら右辺は三角関数．

$$= \frac{B(C-A)}{A(C-A)}\left[\underbrace{\frac{D(C-D)}{B(C-B)}\omega_G^2}_{f^2} - \omega_2^2\right] \tag{230}$$

$$\omega_3^2 = \frac{B(A-B)}{C(A-C)}\left[\underbrace{\frac{D(A-D)}{B(A-B)}\omega_G^2}_{g^2} - \omega_2^2\right] \tag{231}$$

よって，

$$f^2 - g^2 = \frac{D(C-A)(B-D)}{B(C-B)(A-B)}\omega_G^2 \begin{cases} > 0, & A < D < B \\ < 0, & B < D < C \end{cases} \tag{232}$$

1. $A < D < B < C$[19]
   $f^2 > g^2 \geq \omega_2^2$ より，

$$\omega_1^2 \geq \frac{D(B-D)}{A(B-A)}\omega_G^2, \quad -g \leq \omega_2 \leq g \tag{233}$$

2. $A < B < D < C$
   $g^2 > f^2 \geq > \omega_2^2$

$$-f \leq \omega_2 \leq f, \quad \omega_1^2 \geq \frac{D(B-D)}{C(B-C)} \tag{234}$$

いずれの場合も，

$$\dot{\omega}_2 = \pm\sqrt{\frac{(C-B)(B-A)}{AC}}\sqrt{(f^2-\omega_2^2)(g^2-\omega_2^2)} \tag{235}$$

$$\int_0^{\omega_2} \frac{d\omega_2}{\sqrt{(f^2-\omega_)^2(g^2-\omega_2^2)}} = \sqrt{\frac{(C-B)(B-A)}{AC}}(t-t_0) \tag{236}$$

さて，普通は D は C に近いので 2. の場合を代表して考えよう．楕円関数，楕円積分のテキスト Byrd & Friedman “Handbook of Elliptic Integrals” の 219:00

$$\text{積分の左辺} = \frac{1}{g}u \tag{237}$$

$$\mathrm{sn}^2 u = \frac{\omega_2^2}{f^2}, \quad k^2 = \frac{f^2}{g^2} = \frac{(B-A)(C-D)}{(D-A)(C-B)}, \quad k; \text{modulus} \tag{238}$$

$k = 0 \Rightarrow \sin u$ これは $A = B$ or $C = D$ のときに起こる．

$$u = \sqrt{}(t-t_0) = \sqrt{\frac{D(C-B)(D-A)}{ABC}}\omega_G(t-t_0) \tag{239}$$

[19] $A < B < C$ より，A は I_{min}，C は I_{max} for $\forall I$ 慣性能率

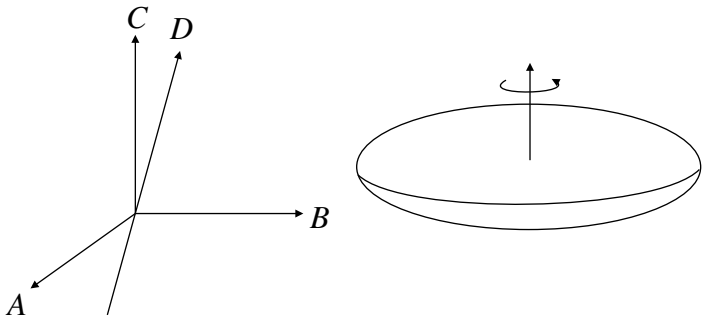

Figure 25: $A < B < D < C$

このとき，

$$\omega_2 = f \sin u = \sqrt{\frac{D(C-D)}{B(C-B)}}\omega_G \sin u \tag{240}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{B(C-A)}{A(C-A)}}\sqrt{f^2-\omega_2^2} = f\sqrt{\frac{B(C-A)}{A(C-A)}}\sqrt{1-\sin^2 u} = \sqrt{\frac{D(C-D)}{A(C-A)}}\omega_G \mathrm{cn}u \tag{241}$$

Euler より[20] ，$\omega_3\omega_1$ と $\dot{\omega}_2$ が同符号だから $\omega_3 > 0$ のときを考えて，正の符号をとる．

$$\frac{d}{dt}\mathrm{sn}u = \mathrm{cn}u \cdot \underbrace{\mathrm{dn}u}_{\sim 1} \cdot \underbrace{\frac{du}{dt}}_{>0} \tag{242}$$

ここで，

$$\sqrt{1-\mathrm{sn}^2 u} = \mathrm{cn}u, \quad \sqrt{1-k^2\mathrm{sn}^2 u} = \mathrm{dn}u$$

また，

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{B(B-A)}{C(C-A)}}g\sqrt{1-k^2\mathrm{sn}^2 u} = \sqrt{\frac{D(D-A)}{C(C-A)}}\omega_G \mathrm{dn}u \tag{243}$$

符号は，

$$\vec{G}_0 = A\omega_1 i + B\omega_2 j + C \underbrace{\omega_3}_{\text{ここで決まる}} k \tag{244}$$

周期 $4K$ for u．よって[21] ，

$$P = \sqrt{\frac{ABC}{D(C-B)(D-A)}}\frac{4K}{\omega_G} \quad \text{for} \quad t \tag{245}$$

3.3.6 オイラー角の時間変化

今，$\vec{G} = \text{const.}$ だから，$\vec{G}$ を $\hat{z}$ にするような座標変換を行う．(192) を書き換えよう．$\vec{\gamma}$

[20] $B\dot{\omega}_2 + \underbrace{(A-C)}_{<0}\omega_3\omega_1 = 0$

[21] $K(t=0) = \frac{\pi}{2}$

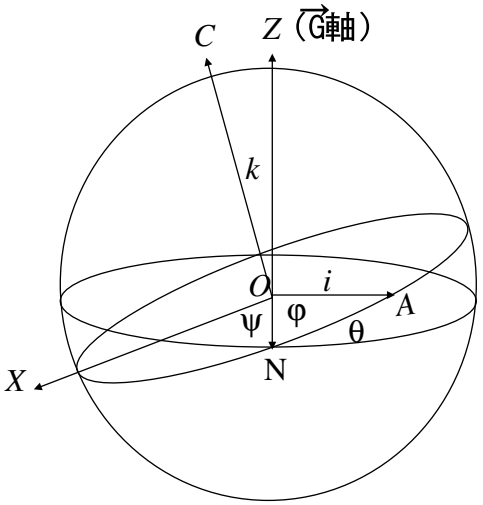

Figure 26: i, j, k と z 軸

は $\vec{G}$ の ABC 軸に対する方向余弦だから，

$$\begin{cases} G\gamma_1 = G\mathrm{S}\left(\frac{i}{\mathrm{OZ}}\right) = G\sin\varphi\sin\theta = A\omega_1 \\ G\gamma_2 = G\mathrm{S}\left(\frac{j}{\mathrm{OZ}}\right) = G\cos\varphi\sin\theta = B\omega_2 \\ G\gamma_3 = G\mathrm{S}\left(\frac{k}{\mathrm{OZ}}\right) = G\cos\theta = C\omega_3 \end{cases} \tag{246}$$

ここで，

$$i = \cos\varphi\cdot\mathrm{ON} + \sin\varphi\cdot\mathrm{OM} \tag{247}$$

$$j = \cos\varphi\cdot\mathrm{OM} - \sin\varphi\cdot\mathrm{ON} \tag{248}$$

$$k = \mathrm{OC} \tag{249}$$

これより[22] ，

$$\mathrm{cet}\varphi = \frac{B\omega_2}{A\omega_1} = \sqrt{\frac{B(C-A)}{A(C-B)}}\mathrm{tn}u \tag{250}$$

$$\cos\theta = \frac{C\omega_3}{G} = \sqrt{\frac{C(D-A)}{D(C-A)}}\mathrm{dn}u \tag{251}$$

(192) の 2 つ目より，

$$\dot{\psi} = \frac{1}{\sin\theta}(\omega_1\sin\varphi + \omega_2\cos\varphi) = \frac{A\omega_1^2 + B\omega_2^2}{G\sin^2\theta} = G\frac{A\omega_1^2 + B\omega_2^2}{A^2\omega_1^2 + B^2\omega_2^2}$$

[22] $\mathrm{tn}u = \frac{\mathrm{sn}u}{\mathrm{cn}u}$

$$= G\frac{C-B+(B-A)\mathrm{sn}^2u}{A(C-B)+C(B-A)\mathrm{sn}^2u} = \frac{G}{A}\left[\frac{1+\frac{B-A}{C-B}\mathrm{sn}^2u}{1+\frac{C}{A}\underbrace{\frac{(B-A)}{(C-B)}}_{-\alpha^2}\mathrm{sn}^2u}\right] \tag{252}$$

すると，

$$\begin{aligned}\psi &= \psi_0+\frac{G}{A}\int_{t_0}\frac{1-\frac{A}{C}\alpha^2\mathrm{sn}^2u}{1-\alpha^2\mathrm{sn}^2u}dt \\ &= \psi_0+\frac{1}{A}\sqrt{\frac{ABCD}{(C-B)(D-A)}}\int_0\frac{1-\frac{A}{C}\alpha^2\mathrm{sn}^2u}{1-\alpha^2\mathrm{sn}^2u}du\end{aligned} \tag{253}$$

Byrd & Friedman 336:01, 337:01 **より，**ψ **は第** 3 **種楕円積分** $\Pi(\psi,\alpha^2,k),\psi=\mathrm{am}u$ **．これは非常に複雑．**

γ：

$$\left.\begin{aligned}\gamma_1 &= \frac{A\omega_1}{\underbrace{D\omega_G}_{G}} = \sqrt{\tfrac{A(C-D)}{D(C-A)}}\mathrm{cn}u \\ \gamma_2 &= \tfrac{B\omega_2}{D\omega_G} = \sqrt{\tfrac{B(C-D)}{D(C-B)}}\mathrm{sn}u \\ \gamma_3 &= \tfrac{C\omega_3}{D\omega_G} = \sqrt{\tfrac{C(D-A)}{D(C-A)}}\mathrm{dn}u\end{aligned}\right\} \tag{254}$$

3.3.7 $D=C$ の場合

(254) **より，**$\gamma_1=\gamma_2=0,\gamma_3=\mathrm{dn}u\Rightarrow\omega_1=\omega_2=0,\omega_3=\omega_G=\mathrm{const.}$ [23] **．**

C **軸の回りに一定角速度で回転．**

$C=B$ **の場合** $k=1$ **．このとき，**

$$\left.\begin{matrix}\mathrm{sn}u\to\sinh u, & \mathrm{cn}u \\ & \mathrm{dn}u\end{matrix}\right\}\to\mathrm{sech}u \tag{255}$$

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{A(C-B)}{B(C-A)}}\mathrm{sech}u\to 0 \tag{256}$$

$$\gamma_2 = \tanh u\to 1 \tag{257}$$

$$\gamma_3 = \sqrt{\frac{C(B-A)}{B(C-A)}}\mathrm{sech}u\to 0 \tag{258}$$

$$\tag{259}$$

これより，

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{B(C-B)}{A(C-A)}}\omega_G\mathrm{sech}u\to 0 \tag{260}$$

[23] $\mathrm{dn}u_{k=1}\equiv 1$

$$\omega_2 = \omega_G \tanh u \to \omega_G \tag{261}$$

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{B(B-A)}{C(C-A)}}\omega_G \mathrm{sech} u \to 0 \tag{262}$$

$t \to \infty$ で B 軸の回りを回転するようになる（もっともこれは安定な解ではない）.

3.3.8 $A = B < C$ (扁球)

$k = 0$

$$\begin{cases} \omega_1 = \sqrt{\frac{D(C-D)}{A(C-A)}}\omega_G \cos u \\ \omega_2 = \sqrt{\frac{D(C-D)}{A(C-A)}}\omega_G \sin u \\ \omega_3 = \sqrt{\frac{D(D-A)}{C(C-A)}}\omega_G = \text{const.} \end{cases} \tag{263}$$

$$u = \sqrt{\frac{D(C-A)(D-A)}{A^2 C}}\omega_G (t - t_0) \tag{264}$$

Total

$$\omega = \sqrt{\frac{D(A+C-D)}{AC}}\omega_G = \text{const.} \tag{265}$$

Euler Angle：(??) より，

$$\cot\varphi = \tan u \to \varphi = \frac{\pi}{2} - u, \quad \cos\theta = \sqrt{\frac{C(D-A)}{D(C-A)}} = \text{const.} \tag{266}$$

$$\underbrace{\dot{\psi} = \frac{G}{A} = \frac{D}{A}\omega_G}_{\text{constant precession}} \quad = \text{const.} \tag{267}$$

$$\vec{\omega} = \underbrace{\dot{\psi}}_{\text{const.}} \cdot \underbrace{\mathrm{OZ}}_{\text{const.}} + \underbrace{\dot{\varphi}}_{\text{const.}} \cdot \underbrace{\mathrm{OC}}_{\text{constant precession(conical rotation)}} \tag{268}$$

幾何学化：目で見て分かろう.

- $A > C$：
  この 2 つの円錐が滑べらずに接しながら回転する事と同値であることを示そう．滑べらないから，

$$ds = ds_C = ds_Z \tag{269}$$

$$ds = a\tan\alpha \cdot \dot{\psi} dt = a\sec\alpha\sin\alpha\dot{\psi} dt = b\sec\alpha\sin\beta\dot{\varphi} dt = b\tan\beta\dot{\varphi} dt \tag{270}$$

  よって，C の回りの回転は $\dot{\varphi}$．よって図で $\vec{\omega}$ は求める (268) と同じもの（C 上で立ってみると $\dot{\varphi} > 0$ となる）.

- $A < C$：
  今は $\dot{\varphi} < 0, \dot{\psi} > 0$．C 上で立ってみると $\dot{\varphi} < 0$

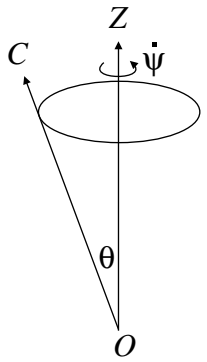

Figure 27: Constant precession

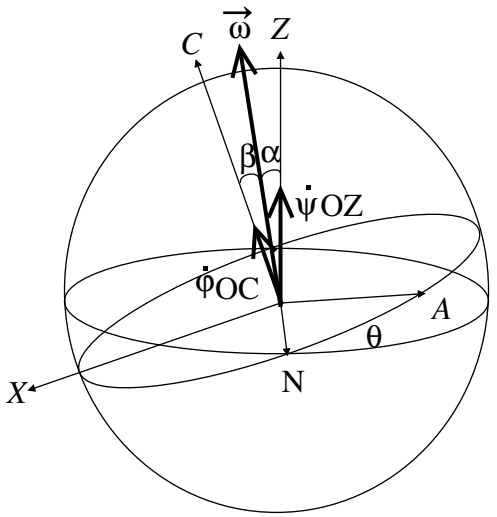

Figure 28: $\vec{\omega}$

3.3.9 Poinsot の方法

次の諸定理は $\vec{N}$ によらず成立する．

Theorem 1 (Poinsot)

$$h = \frac{\omega^2}{\rho^2} \tag{271}$$

ただし，$\vec{\omega}$ と慣性楕円体の交点を P (極) としたとき，

$$\rho = OP \tag{272}$$

ここで，

$$h = 2T = \omega^2 I_\omega \quad \left(M\ell^4 = 1 \text{ の単位系で}\right) \quad I_\omega = \frac{1}{\rho^2} \tag{273}$$

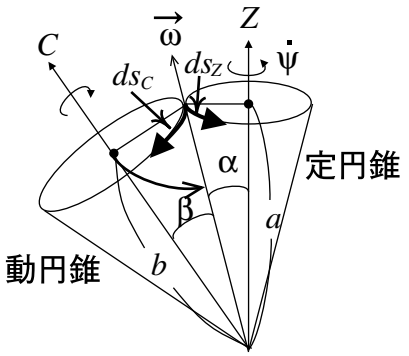

Figure 29: $A > C$

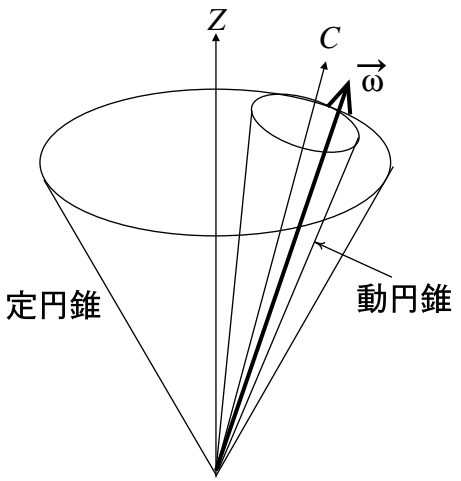

Figure 30:

Theorem 2 (Poinsot) 極における接平面は $\vec{G}$ に垂直．

いま，i, j, k は主慣性軸．よって，慣性楕円体は[24] ，

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 = 1 \tag{274}$$

$P(\xi_p, \eta_p, \zeta_p)$ における接平面は，

$$A\xi_p\xi + B\eta_p\eta + C\zeta_p\zeta = 1 \tag{275}$$

さて，$\vec{\xi_p} = \frac{\vec{\omega}}{\rho}$ より，

$$A\omega_1\xi + B\omega_2\eta + C\omega_3\zeta = \frac{\omega}{\rho}, \quad \vec{G}\cdot\vec{\xi} = \frac{\omega}{\rho} \tag{276}$$

[24] $M\ell^4 = 1$ で normalize してある．

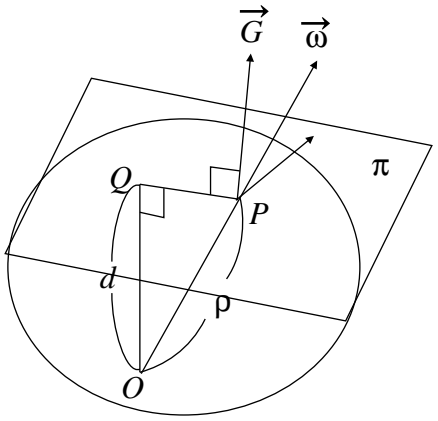

Figure 31: 接平面

一方，

$$\vec{G} = A\omega_1 i + B\omega_2 j + C\omega_3 k \tag{277}$$

よって，

$$\vec{G} \perp \text{接平面} \tag{278}$$

Theorem 3 (Poinsot)

$$d = \frac{\sqrt{h}}{G} \tag{279}$$

$$d = \frac{\omega}{\rho} \frac{1}{A^2\omega_1^2 + B^2\omega_2^2 + C^2\omega_3^2} = \frac{\sqrt{h}}{G} \tag{280}$$

これらの Theorem を使って，
自由回転：$\vec{T}, \vec{G}$: 一定

$$\left.\begin{array}{l} h = D\omega_G^2 \\ G\ D\omega_G \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad D, \omega_G : \text{一定} \tag{281}$$

Theorem 3 より，

$$d = \frac{\sqrt{h}}{G} = \frac{1}{\sqrt{D}}, \quad A = \frac{1}{a^2}, \quad B = \frac{1}{b^2}, \quad C = \frac{1}{c^2}, \quad D = \frac{1}{d^2} \tag{282}$$

ここで a, b, c は慣性楕円体の半長軸．よって D の意味ずけができる．さて，

$$\mathrm{OQ} = d\frac{\vec{G}}{G} = \text{const.} \tag{283}$$

ここで，Q は固定点．よってこの接平面 π は定平面である．この定平面と楕円体の接点が極である．楕円体は π に接しながら転がる訳である．

$$\omega = \sqrt{h}\rho \tag{284}$$

3.3.10 ポルホードとハーポルホード

ポルホード，ハーポルホード[25]

ポルホード (Polhode) 極が慣性楕円体上に描く軌跡．C の回りの動円錐が楕円体を切り取る切口．

ハーポルホード (Herpolhode) ω と定平面 π との交点の軌跡．

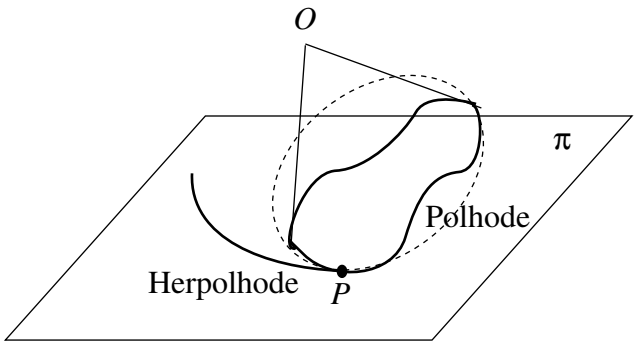

Figure 32: ポルホードとハーポルホード

$$(h = A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2) \times G^2 \tag{285}$$

$$(G^2 = A^2\omega_2^2 + B^2\omega_2^2 + C\omega_3^2) \times h \tag{286}$$

$$\Downarrow$$

$$(Ah - G^2)A\omega_2^2 + (Bh - G^2)B\omega_2^2 + (Ch - G^2)C\omega_3^2 = 0 \tag{287}$$

$\vec{\omega}$ 上の一点を (ξ, η, ζ) とすると，

$$(Ah - G^2)A\xi^2 + (Bh - G^2)B\eta^2 + (Ch - G^2)C\zeta^2 = 0 \tag{288}$$

$G = D\omega_G, h = D\omega_G^2$ より，

$$A(A - D)\xi^2 + B(B - D)\eta^2 + C(C - D)\zeta^2 = 0 \tag{289}$$

これは $\vec{\omega}$ の方向を決める式．

- Polhode
  (289) と $A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 = 1$ との交点．(289) は，

$$A^2\xi^2 + B^2\eta^2 + C^2\zeta^2 = D, \quad A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 = 1 \tag{290}$$

[25] Poinsot による術語．

結局ポルホードの方程式は，

$$\frac{\xi^2}{a^4}+\frac{\eta^2}{b^4}+\frac{\zeta^2}{c^4}=\frac{1}{d^2},\quad \frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2} \tag{291}$$

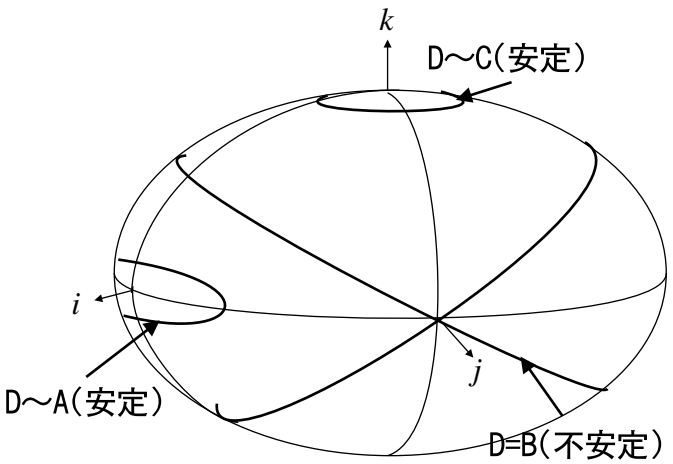

Figure 33: ポルホード

4 正準方程式

4.1 オイラー角

$\psi, \theta, \varphi, p_\psi, p_\theta, p_\varphi$ を考えよう（後は正準変換で移れば良い）．(192) より，

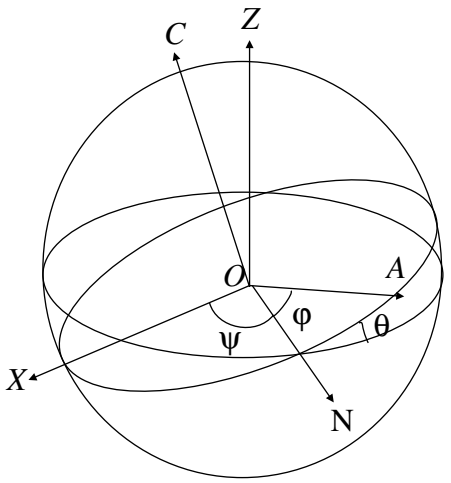

Figure 34: ψ, θ, φ

$$\left.\begin{aligned} \omega_1 &= \dot{\psi}\sin\theta\sin\varphi + \dot{\theta}\cos\varphi \\ \omega_2 &= \dot{\psi}\sin\theta\cos\varphi - \dot{\theta}\sin\varphi \\ \omega_3 &= \dot{\psi}\cos\theta \end{aligned}\right\} \tag{292}$$

$$T = \frac{1}{2}\left(A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2\right) \tag{293}$$

共役な運動量は，

$$\left.\begin{aligned} p_\psi &= \tfrac{\partial T}{\partial \dot{\psi}} = A\omega_1\sin\theta\sin\varphi + B\omega_2\sin\theta\cos\varphi + C\omega_3\cos\theta \\ p_\theta &= \tfrac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = A\omega_1\cos\varphi - B\omega_2\sin\varphi \\ p_\varphi &= \tfrac{\partial T}{\partial \dot{\varphi}} = C\omega_3 \end{aligned}\right\} \tag{294}$$

(294);

$$\left.\begin{aligned} A\omega_1 &= p_\theta\cos\varphi + \tfrac{\sin\varphi}{\cos\theta}(p_\psi - p_\varphi\cos\theta) \\ B\omega_2 &= -p_\theta\sin\varphi + \tfrac{\cos\varphi}{\sin\theta}(p_\psi - p_\varphi\sin\theta) \\ C\omega_3 &= p_\varphi \end{aligned}\right\} \tag{295}$$

一方，全角運動量 $\vec{G}$ は，

$$G^2 = A^2\omega_1^2 + B^2\omega_2^2 + C^2\omega_3^2 = p_\theta^2 + p_\varphi^2 + \frac{1}{\sin^2\theta}(p_\psi - p_\varphi\cos\theta)^2 \tag{296}$$

運動方程式は，

$$\left.\begin{array}{l} \frac{d}{dt}(p_\psi, p_\theta, p_\varphi) = \frac{\partial F}{\partial(\psi,\theta,\varphi)} \\ \frac{d}{dt}(\psi, \theta, \varphi) = -\frac{\partial F}{\partial(p_\psi, p_\theta, p_\varphi)} \\ F = -T = -\frac{1}{2}(A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + \omega_3^2) \quad mbox \text{ ハミルトニアン (自由回転)} \end{array}\right\} \tag{297}$$

一般にはハミルトニアンは，

$$F = -T + U(\psi, \theta, \varphi), \quad \nabla U = \vec{N} \tag{298}$$

4.2 Andoyer(アンドワイエ) 変数

$$\begin{pmatrix} p_\psi & , & \psi \\ p_\theta & , & \theta \\ p_\varphi & , & \varphi \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} L = p_\varphi & , & \ell \\ G & , & g \\ H = p_\psi & , & h \end{pmatrix} \tag{299}$$

意味：

- L：$\vec{G}$ の C 軸成分
- H：$\vec{G}$ の z 軸成分
- G：全角運動量

正準変換：
母関数，

$$S = S(\underbrace{L, G, H}_{\text{新運動量}}, \underbrace{\psi, \theta, \varphi}_{\text{旧座標}}) \tag{300}$$

$$(p_\psi, p_\theta, p_\varphi) = \frac{\partial S}{\partial(\psi, \theta, \varphi)}, \quad (\ell, g, h) = \frac{\partial S}{\partial((L, G, H))} \tag{301}$$

p_ψ らを L, G, H で表すと，

$$\left.\begin{array}{l} p_\psi = H \\ p_{[\varphi]} = G \\ p_\theta = \pm\left[G^2 - L^2 - \frac{1}{\sin^2\theta}(H - L\cos\theta)^2\right]^{1/2} \end{array}\right\} \tag{302}$$

$$\begin{aligned} S &= \int p_\psi d\psi + \int p_\varphi d\varphi + \int p_\theta d\theta \\ &= H\psi + L\varphi - \int_{\theta^*}^{\theta} \left[G^2 - L^2 - \frac{1}{\sin^2\theta}(H - L\cos\theta)^2\right]^{1/2} d\theta \end{aligned} \tag{303}$$

ここで θ^* は，

$$\left[G^2 - L^2 - \frac{1}{\sin^2\theta}(H - L\cos\theta)^2\right] = 0 \tag{304}$$

の大きな方の根である．$0 < \theta < 2\pi, \theta^* = \theta(L,G,H)$．$t = \cos\theta^*$ とおく．

$$(G^2 - L^2)(1-t^2) - (H - Lt)^2 = 0 \Rightarrow G^2t^2 - 2HLt + L^2 - G^2 + H^2 = 0 \tag{305}$$

よって，

$$t = \frac{1}{G^2}\left[HL \pm \sqrt{(G^2-H^2)(G^2-L^2)}\right], \quad \cos I = \frac{H}{G}, \quad \cos J = \frac{L}{G}. \quad 0 \le I, J \le \pi \tag{306}$$

$$\cos\theta = \cos I \cos J \pm \sin I \sin J = \cos(I \mp J) \tag{307}$$

より，

$$\theta = \pm(I \pm J), \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \theta^* = I + J & \text{大きい方} \\ \theta^* = |I - J| & \text{小さい方} \end{cases} \tag{308}$$

ℓ, g, h の決定

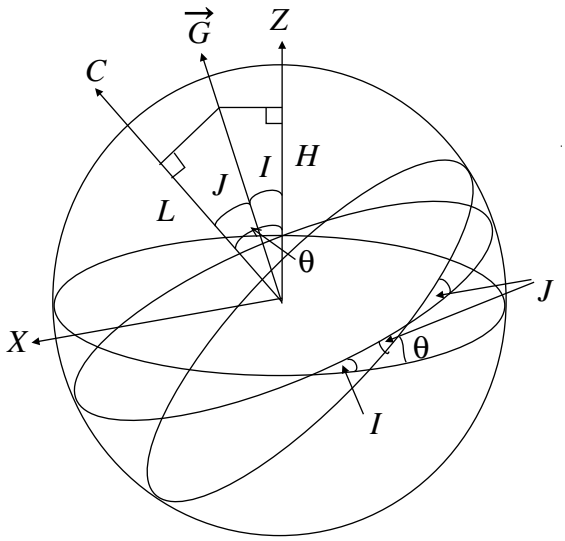

Figure 35: I, J

$$\begin{aligned}
\ell &= \frac{\partial S}{\partial L} \\
&= \varphi - \int_{\theta^*(L,G,H)}^{\theta} \frac{\partial}{\partial L}\left[G^2 - L^2 - \frac{1}{\sin^2\theta}(H - L\cos\theta)^2\right]^{1/2} d\theta \\
&\quad + \left[G^2 - L^2 - \frac{1}{\sin^2\theta}(H - L\cos\theta)^2\right]_{\theta=\theta^*} \frac{\partial\theta^*}{\partial L} \\
&= \varphi - \int_{\theta^*(L,G,H)}^{\theta} \left[-L + \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}(H - L\cos\theta)\right]\left[G^2 - L^2 - \frac{1}{\sin^2\theta}(H - L\cos\theta)^2\right]^{-1/2} d\theta \\
&\quad + \left[G^2 - L^2 - \frac{1}{\sin^2\theta}(H - L\cos\theta)^2\right]_{\theta=\theta^*} \frac{\partial\theta^*}{\partial L}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \varphi - \int_{\theta^*}^{\theta} \frac{-\cos J + \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}(\cos I - \cos J\cos\theta)}{\left[1-\cos^2 J - \frac{1}{\sin^2\theta}(\cos I - \cos J\cos\theta)^2\right]^{1/2}} d\theta \\
&= \varphi - \int_{\theta^*}^{\theta} \frac{-\cos J + \frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}(\cos I - \cos J\cos\theta)}{\sin J\left[1-\frac{1}{\sin^2\theta\sin^2 J}(\cos I - \cos J\cos\theta)^2\right]^{1/2}} d\theta \qquad (309)
\end{aligned}
$$

ここで，

$$\cos I = \cos I\cos\theta + \sin J\sin\theta\cos\gamma \Rightarrow \cos I - \cos J\cos\theta = \sin J\sin\theta\cos\gamma \qquad (310)$$

より，

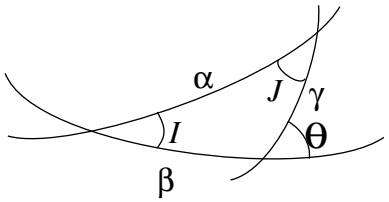

Figure 36: α, β, γ

$$\ell = \varphi - \int_{\theta^*}^{\theta} \frac{-\cos J + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}\sin J\cos\gamma}{\sin J\cos\gamma} d\theta \qquad (311)$$

変数変換，

$$-\sin\gamma d\gamma = \frac{1}{\sin J}\left[-\cos I\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta} + \frac{\cos J}{\sin^2\theta}\right] d\theta \qquad (312)$$

$\theta \to \theta^*, \gamma \to 0$，

$$\ell = \varphi - \int_0^{\gamma} d\gamma = \varphi - \gamma \qquad (313)$$

同様にして，

$$h = \psi - \int_{\theta^*}^{\theta} \frac{H - L\cos\theta}{\sin^2\theta}\left[G^2 - L^2 - \frac{(H-L\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}\right]^{-1/2} d\theta = \psi - \beta \qquad (314)$$

$$g = -G\int_{\theta^*}^{\theta}\left[G^2 - L^2 - \frac{(H-L\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}\right]^{-1/2} d\theta = \alpha \qquad (315)$$

$$
\begin{aligned}
p_\psi &= L && (316)\\
p_\varphi &= H && (317)\\
p_\theta^2 &= G^2 - L^2 - \frac{(\cos I - \cos J\cos\theta)^2}{\sin^2\theta} \\
&= G^2\left[\sin^2 J - \frac{(\cos I - \cos J\cos\theta)^2}{\sin^2\theta}\right] \\
&= G^2\sin^2 J\sin^2\gamma && (318)\\
p_\theta &= \pm G\sin J\sin\gamma && (319)
\end{aligned}
$$

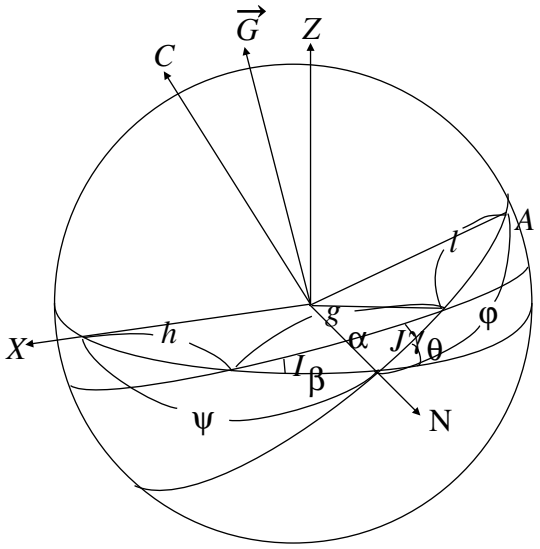

Figure 37: $h = \varphi - \gamma, g = \alpha, \ell = \psi - \beta$

幾何学的に，

$$\begin{cases} A\omega_1 = G \sin J \sin \ell \\ B\omega_2 = G \sin J \cos \ell \\ C\omega_3 = G \cos \ell \end{cases} \tag{320}$$

$$\begin{aligned} & A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2 \\ = \ & \frac{1}{A} G^2 \sin^2 J \sin^2 \ell + \frac{1}{B} G^2 \sin^2 J \cos^2 \ell + \frac{1}{C} G^2 \cos^2 J \\ = \ & \frac{1}{A} (G^2 - L^2) \sin^2 \ell + \frac{1}{B} (G^2 - L^2) \cos^2 \ell + \frac{1}{C} L^2 \end{aligned} \tag{321}$$

$$2T = \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{2A} - \frac{1}{2B} \right) L^2 + \left(\frac{1}{2A} + \frac{1}{2B} \right) G^2 + \left(\frac{1}{2B} - \frac{1}{2A} \right) (G^2 - L^2) \cos 2\ell \tag{322}$$

よって，運動方程式，

$$\frac{d}{dt}(L, G, H) = \frac{\partial F}{\partial(\ell, g, h)}, \quad \frac{d}{dt}(\ell, g, h) = -\frac{\partial F}{\partial(L, G, H)}, \quad F = -T + U \tag{323}$$

明らかに $A = B$ だと直ちに積分できる．一般には $A \simeq B$ なので，

$$F_0 = -\frac{1}{2} \left[(\quad) L^2 + (\quad) G^2 \right] \tag{324}$$

$$F_1 = -\frac{1}{2} \left[(\quad) (G^2 - L^2) \cos 2\ell \right] \tag{325}$$

と取って，摂動計算を行う．Kepler 運動とは違い，これは作用変数，角変数になっていない（T に ℓ も含まれているから）．

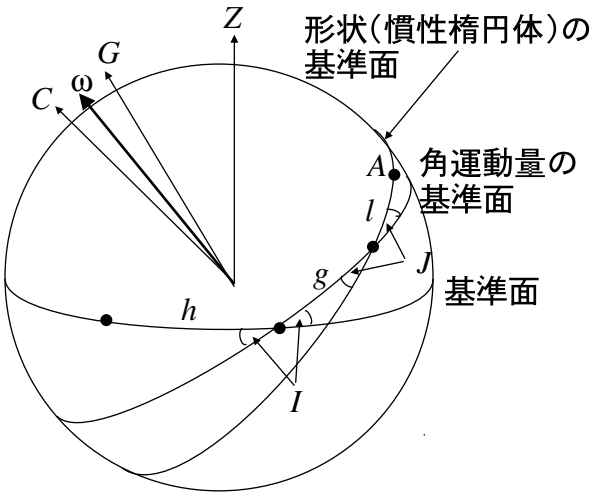

Figure 38: h, g, ℓ, ω

4.3 重心の回りの自由回転

4.3.1 $A = B$ の場合

$$F = -\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right) L^2 + \frac{1}{A} G^2\right] \tag{326}$$

解は，

$$\begin{cases} L, G, H, h = \text{const.} \\ \ell = \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{A}\right) Lt + \ell_0 \quad ; \quad \text{slow} \\ g = \frac{1}{A} G^2 t + g_0 \quad ; \quad \text{fast} \end{cases} \tag{327}$$

自転軸は，

$$\begin{aligned} A\omega_1 &= G \sin J \sin \ell & & \omega_1 = \tfrac{G}{A} \sin J \sin \ell \\ A\omega_2 &= G \sin J \cos \ell & \Rightarrow \quad & \omega_2 = \tfrac{G}{A} \sin J \cos \ell \\ C\omega_3 &= G \cos J & & \omega_3 = \tfrac{G}{C} \cos J \end{aligned} \tag{328}$$

$$\omega^2 = \frac{G^2}{A^2} \sin^2 J + \frac{G^2}{C^2} \cos^2 J \simeq \frac{G^2}{A^2} \tag{329}$$

$\vec{\omega}$ は C 軸の回りを ℓ でゆっくり precession を行う（経度変化）.

4.3.2 $A \neq B < C$ の場合

解は G, H, h は const.

$$\frac{dL}{dt} = \left(\frac{1}{2B} - \frac{1}{2A}\right)(G^2 - L^2) \sin 2\ell \tag{330}$$

$$\frac{d\ell}{dt} = \left(\frac{1}{C} - \frac{1}{2A} - \frac{1}{2B}\right) L + \left(\frac{1}{2A} - \frac{1}{2B}\right) L \cos 2\ell \tag{331}$$

$$\frac{dg}{dt} = \left(\frac{1}{2A} + \frac{1}{2B}\right) G + \left(\frac{1}{2B} - \frac{1}{2A}\right) G \cos 2\ell \tag{332}$$

さて，ハミルトニアンは一つの積分であるから，

$$\left(\frac{1}{4A}+\frac{1}{4B}-\frac{1}{4C}\right)L^2-\left(\frac{1}{4A}+\frac{1}{4B}\right)G^2+\left(\frac{1}{4A}-\frac{1}{4B}\right)(G^2-L^2)\cos 2\ell=\text{const.} \tag{333}$$

今，$t=t_0,\ell=0,L=L_0$ とする．すると $L_0=L_{min}$．

$$\ell=0 \quad\Rightarrow\quad \left.\frac{dL}{dt}\right|_0=0 \tag{334}$$

しかも，

$$\frac{d\ell}{dt}=\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{B}\right)L<0 \quad\Rightarrow\quad \frac{dL}{dt} \quad \text{は} \quad \text{負}\to 0\to \text{正} \tag{335}$$

よって，

$$\left(\frac{1}{2A}-\frac{1}{2B}\right)(G^2-L^2)\cos 2\ell=\left(\frac{1}{2A}+\frac{1}{2B}-\frac{1}{C}\right)(L_0^2-L^2)+\left(\frac{1}{2A}+\frac{1}{2B}\right)(G^2-L_0^2) \tag{336}$$

(330) とこれより ℓ を消去しよう．

$$\begin{aligned}
\left(\frac{dL}{dt}\right)^2 &= \left[\left(\frac{1}{2A}-\frac{1}{2B}\right)(G^2-L^2)\right]^2-\left[\left(\frac{1}{2A}+\frac{1}{2B}-\frac{1}{C}\right)(L_0^2-L^2)+\left(\frac{1}{2A}-\frac{1}{2B}\right)(G^2-L_0^2)\right]^2 \\
&= \left(\frac{1}{B}-\frac{1}{C}\right)(L_0^2-L^2)\left[\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{C}\right)L^2+\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{B}\right)L_0^2+\left(\frac{1}{B}-\frac{1}{A}\right)G^2\right] \\
&= \left(\frac{1}{A}-\frac{1}{C}\right)\left(\frac{1}{B}-\frac{1}{C}\right)(L^2-L_0^2)(D^2-L^2) \qquad (337)\\
D &\equiv \frac{\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)G^2+\left(\frac{1}{B}-\frac{1}{C}\right)L_0^2}{\frac{1}{A}-\frac{1}{C}}>L_0^2 \quad (G>L_0\text{より}) \qquad (338)
\end{aligned}$$

よって[26] ，

$$\int_{L_0}^{L}\frac{dL}{\sqrt{(D^2-L^2)(L^2-L_0^2)}}=\frac{1}{C}\sqrt{\frac{(C-A)(C-B)}{AB}}(t-t_0) \tag{339}$$

$$= \frac{1}{D}u,\quad L=L_0\mathrm{nd}u,\quad k^2=\frac{D^2-L_0^2}{D^2}=\frac{C(B-A)(G^2-L_0^2)}{C(B-A)G^2+A(C-B)L_0^2} \tag{340}$$

ここで $\mathrm{nd}u=\frac{1}{\mathrm{dn}u}$．

$$u=\frac{D}{C}\sqrt{\frac{(C-A)(C-B)}{AB}}(t-t_0) \tag{341}$$

cf

$$u=\sqrt{\frac{D^*(C-B)(D^*-A)}{ABC}}(t-t_0) \tag{342}$$

$$2T=D^*\omega_G^2=\frac{G^2}{D^*}=\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{B}\right)L_0^2+\frac{1}{B}G^2$$

$$\left(\frac{1}{D^*}-\frac{1}{A}\right)G^2=\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{A}\right)D^2 \tag{343}$$

[26] Byrd & Friedman 217.00 より．

よって，

$$\begin{aligned} u &= \sqrt{\frac{C-B}{BC}\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{D^*}\right)G^2}(t-t_0) \\ &= \sqrt{\frac{C-B}{BC}\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{A}\right)D^2}(t-t_0) \\ &= \frac{D}{C}\sqrt{\frac{(C-B)(C-A)}{AB}}(t-t_0) \end{aligned} \tag{344}$$

より，一致している（あたりまえ）．すると (331) に代入すると，

$$\frac{d(2\ell)}{\frac{2}{C}-\frac{1}{A}-\frac{1}{B}+\left(\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)\cos 2\ell} = Ldt = \frac{C}{D}\sqrt{\frac{AB}{(C-A)(C-B)}}L_0(\mathrm{nd}u)du \tag{345}$$

積分すると，

$$\begin{aligned} \int_0^\ell \text{左辺} &= \frac{2}{sqrt\alpha^2-\beta^2}\tan^{-1}\left[\frac{\alpha-\beta}{\sqrt{\alpha^2-\beta^2}}\tan\ell\right] \quad (\alpha^2>\beta^2) \\ &= -C\sqrt{\frac{AB}{(C-A)(C-B)}}\tan^{-1}\left(\sqrt{\frac{B(C-A)}{A(C-B)}}tan\ell\right) \end{aligned} \tag{346}$$

$$\int_0^u \text{右辺} = \frac{C}{D}\sqrt{\frac{AB}{(C-A)(C-B)}}L_0\int_0^u \frac{du}{\mathrm{dn}u} \tag{347}$$

315.01 より，

$$\begin{aligned} \int \frac{du}{\mathrm{dn}u} &= \frac{1}{k'}\tan^{-1}\left(\frac{k'\mathrm{sn}u-\mathrm{cn}u}{k'\mathrm{sn}u+\mathrm{cn}u}\right)\Bigg|_0^u \\ &= \frac{D}{L_0}\left[\tan^{-1}\left(\frac{\frac{L_0}{D}\mathrm{sn}u-\mathrm{cn}u}{\frac{L_0}{D}\mathrm{sn}u+\mathrm{cn}u}\right)+\frac{\pi}{4}\right] \end{aligned} \tag{348}$$

よって，

$$\begin{aligned} -\sqrt{\frac{A(C-B)}{A(C-B)}}\tan\ell &= \frac{1+\frac{\frac{L_0}{D}\mathrm{sn}u-\mathrm{cn}u}{\frac{L_0}{D}\mathrm{sn}u+\mathrm{cn}u}}{1-\frac{\frac{L_0}{D}\mathrm{sn}u-\mathrm{cn}u}{\frac{L_0}{D}\mathrm{sn}u+\mathrm{cn}u}} \\ &= \frac{L_0\mathrm{sn}u}{D\mathrm{cn}u} = \frac{L_0}{D}\mathrm{tn}u \end{aligned} \tag{349}$$

したがって，

$$\tan\ell = \sqrt{\frac{A(C-B)}{B(C-A)}}\frac{L_0}{D}\mathrm{tn}u \tag{350}$$

最後に，

$$\begin{aligned} g &= g_0+\left(\frac{1}{2A}-\frac{1}{2B}\right)G\frac{C}{D}\sqrt{\frac{AB}{(C-A)(C-B)}}u \\ &\quad +\left(\frac{1}{2B}-\frac{1}{2A}\right)G\frac{C}{D}\sqrt{\frac{AB}{(C-A)(C-B)}}\int_0^{2\ell}\cos 2\ell du \end{aligned} \tag{351}$$

$$\begin{aligned}\cos 2\ell &= \frac{1-\tan^2\ell}{1+\tan^2\ell} = \frac{1-\frac{A(C-B)}{B(C-A)}\frac{L_0^2}{D^2}\mathrm{tn}^2u}{1+\frac{A(C-B)}{B(C-A)}\frac{L_0^2}{D^2}\mathrm{tn}^2u}\\ &= \frac{1-\left[1-\frac{A(C-B)}{B(C-A)}\frac{L_0^2}{D^2}\right]\mathrm{sn}^2u}{1-\left[1+\frac{A(C-B)}{B(C-A)}\frac{L_0^2}{D^2}\right]\mathrm{sn}^2u}\\ &\equiv \frac{1-\alpha_+^2\mathrm{sn}^2u}{1-\alpha_-^2\mathrm{sn}^2u}\\ &= \frac{1}{\alpha_-^2}\left(\alpha_+^2+\frac{\alpha_-^2-\alpha_+^2}{1-\alpha_-^2\mathrm{sn}^2u}\right)\end{aligned} \tag{352}$$

よって，

$$\int\cos 2\ell du = \left(\frac{\alpha_+}{\alpha_-}\right)^2 u + \left(\frac{\alpha_-^2-\alpha_+^2}{\alpha_-^2}\right)\int_0^u \frac{du}{1-\alpha_-^2\mathrm{sn}^2u} \tag{353}$$

最後の積分は 400.01．この時，$\alpha_-^2 > k^2 = 1-\frac{L_0^2}{D^2}$．瞬間回転軸 $\vec{\omega}$ は，

$$\omega_1 = \frac{1}{A}\sqrt{G^2-L^2}\sin\ell,\quad \omega_2 = \frac{1}{B}\sqrt{G^2-L^2}\cos\ell,\quad \omega_3 = \frac{1}{C}L \tag{354}$$

$$G^2-L^2 = G^2-L_0^2\mathrm{nd}^2u = G^2-\frac{L_0^2}{1-k^2\mathrm{sn}^2u} \tag{355}$$

$$(G^2-L^2)\sin^2\ell = (G^2-L^2)\frac{\tan^2\ell}{1+\tan^2\ell} = \frac{A(C-B)L_0^2}{B(C-A)D^2}(G^2-L_0^2)\mathrm{sd}^2u \tag{356}$$

ここで，$\mathrm{sd}u = \frac{\mathrm{sn}u}{\mathrm{dn}u}$．よって，

$$\omega_1 = \frac{1}{A}\sqrt{(G^2-L_0^2)}\sqrt{\frac{A(C-B)}{B(C-A)}}\frac{L_0}{D}\mathrm{sd}u \tag{357}$$

$$\omega_2 = \frac{1}{B}\sqrt{(G^2-L_0^2)}\mathrm{cn}u \tag{358}$$

$$\omega_3 = \frac{1}{C}L_0\mathrm{nd}u \tag{359}$$

ここで，$\mathrm{cd}u = \frac{\mathrm{cn}u}{\mathrm{dn}u}$．
cf

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{D^*(C-D^*)}{A(C-A)}}\omega_G\mathrm{cn}u \tag{360}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{D^(*)(C-D^*)}{B(C-B)}}\omega_G\mathrm{sn}u \tag{361}$$

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{D^*(D^*-A)}{C(C-A)}}\omega_G\mathrm{dn}u \tag{362}$$

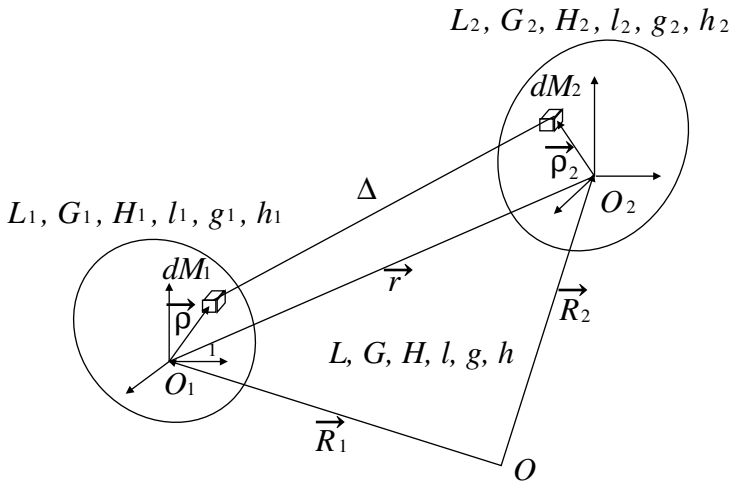

Figure 39: 有限 2 体問題

4.4 有限 2 体問題

ポテンシャル

$$U = k^2 \int \frac{dM_1 dM_2}{\Delta} \quad ; \quad \text{力関数} \quad (= -U; \text{ポテンシャル}) \tag{363}$$

$$\begin{aligned}
\Delta^2 &= |(\vec{R}_2 - \vec{\rho}_2) - (\vec{R}_1 - \vec{\rho}_1)| = |\vec{r} + \vec{\rho}_2 - \vec{\rho}_1| \\
&= r^2 + 2\vec{r} \cdot (\vec{\rho}_2 - \vec{\rho}_1) + (\vec{\rho}_2 - \vec{\rho}_1)^2 \\
&= r^2 \left[1 + \frac{2\vec{r}}{r^2} \cdot (\vec{\rho}_2 - \vec{\rho}_1) + \frac{(\vec{\rho}_2 - \vec{\rho}_1)^2}{r^2} \right] \\
&= r^2 \left[1 + \frac{2\vec{r} \cdot (\vec{\rho}_2 - \vec{\rho}_1)}{r|\vec{\rho}_2 - \vec{\rho}_1|} \frac{|\vec{\rho}_2 - \vec{\rho}_1|}{r} + \frac{(|\vec{\rho}_2 - \vec{\rho}_1|)^2}{r^2} \right]
\end{aligned} \tag{364}$$

普通，

$$\frac{|\vec{\rho}_2 - \vec{\rho}_1|}{r} \ll 1$$

よって，ルジャントルで展開して，

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\Delta} &= \frac{1}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{|\vec{\rho}_2 - \vec{\rho}_1|}{r} \right)^n P_n \left(\frac{\vec{r} \cdot (\vec{\rho}_2 - \vec{\rho}_1)}{r|\vec{\rho}_2 - \vec{\rho}_1|} \right) \\
&= \frac{1}{r} + \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot (\vec{\rho}_2 - \vec{\rho}_1) + \frac{1}{r^3} \left\{ \frac{3}{2} \frac{[\vec{r} \cdot (\vec{\rho}_2 - \vec{\rho}_1)]^2}{r^2} - \frac{1}{2(\vec{\rho}_2 - \vec{\rho}_1)^2} + \cdots \right\}
\end{aligned} \tag{365}$$

よって，

$$U = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots \tag{366}$$

$$U_0 = k^2 int \frac{1}{r} dM_1 dM_2 = k^2 \frac{M_1 M_2}{r} \tag{367}$$

$$
\begin{aligned}
U_1 &= k^2 \int \frac{\vec{r}}{r^3} \cdot (\vec{\rho}_2 - \vec{\rho}_1) dM_1 dM_2 \\
&= \frac{k^2}{r^3} \vec{r} \left\{ M_2 \int \vec{\rho}_2 dM_1 - M_1 \int \vec{\rho}_1 dM_2 \right\} \\
&= 0 \quad \left(\vec{\rho} \text{は重心からの距離だから} \int \vec{\rho} dM = 0 \right) \qquad (368) \\
U_2 &= \frac{k^2}{r^3} \int \left\{ \frac{3}{2} \frac{[\vec{r} \cdot (\vec{\rho}_2 - \vec{\rho}_1)]^2}{r^2} - \frac{1}{2} (\vec{\rho}_1 - \vec{\rho}_2) \right\} dM_1 dM_2 \qquad (369)
\end{aligned}
$$

片方の M について ρ の 1 次ではゼロより，

$$
\begin{aligned}
U_2 &= \frac{k^2}{r^3} \int \left\{ \frac{3}{2} \left(\frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{\rho}_1 \right)^2 + \frac{3}{2} \left(\frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{\rho}_2 \right)^2 - \frac{1}{2} \vec{\rho}_1^2 - \frac{1}{2} \vec{\rho}_2^2 \right\} dM_1 dM_2 \\
&= \frac{k^2 M_2}{r^3} \int \left\{ \frac{3}{2} \left(\frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{\rho}_1 \right) - \frac{1}{2} \vec{\rho}_1^2 \right\} dM_1 + \frac{k^2 M_1}{r^3} \int \left\{ \frac{3}{2} \left(\frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{\rho}_2 \right) - \frac{1}{2} \vec{\rho}_2^2 \right\} dM_2 \qquad (370)
\end{aligned}
$$

Fig. 40 より，

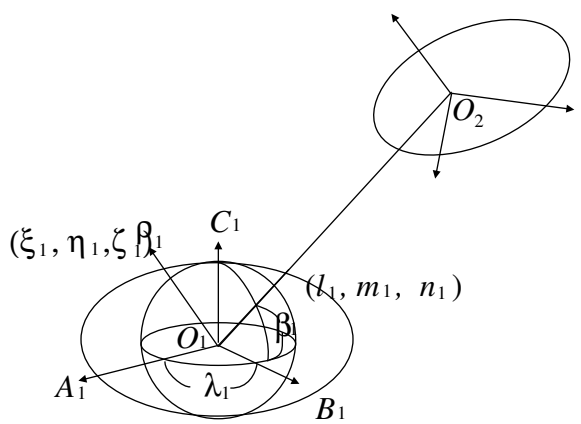

Figure 40: 有限 2 体問題

$$
\begin{aligned}
& \frac{3}{2} \left(\frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{\rho}_1 \right)^2 - \frac{1}{2} \vec{\rho}_1 \\
= \; & \frac{3}{2} (\ell_1 \xi_1 + m_1 \eta_1 + \zeta_1 n_1)^2 \frac{1}{2} (\xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2) \\
= \; & \xi_1^2 + \eta_1^2 + \zeta_1^2 - \frac{3}{2} \left\{ \ell_1^2 (\eta_1^2 + \zeta_1^2) + m_1^2 (\xi_1^2 + \zeta_1^2) + n_1^2 (\xi^2 + \eta_1^2) \right. \\
& \left. -2(\ell_1 m_1 \xi_1 \eta_2 + m_1 n_1 \eta_1 \zeta_1 + n_1 \ell_1 \zeta_1 \xi_1) \right\} \qquad (371)
\end{aligned}
$$

今，主慣性主軸をとっているから，慣性積 $D = E = F = 0$ より，

$$
\begin{aligned}
& \int \left\{ \frac{3}{2} \left(\frac{\vec{r}}{r} \cdot \vec{\rho}_1 \right)^2 - \frac{1}{2} \vec{\rho}_1 \; 2 \right\} dM_1 \\
= \; & \frac{1}{2} ((A_1 + B_1 + C_1)) - \frac{3}{2} (\ell_1^2 A_1 + m_1^2 B_1 + n_1^2 C_1) \qquad (372)
\end{aligned}
$$

ここで，

$$\ell_1 = \cos\beta_1 \cos\lambda_1, \quad m_1 = \cos\beta_1 \sin\lambda_1, \quad n_1 = \sin\beta_1 \tag{373}$$

より，

$$\ell_1^2 A_1 + m_1^2 B_1 + n_1^2 C_1 = \frac{1}{2}(A_1 + B_1) + \left(C_1 - \frac{A_1 + B_1}{2}\right)\sin^2\beta_1 + \frac{1}{2}(A_1 - B_1)\cos^2\beta_1 \cos 2\lambda_1 \tag{374}$$

よって，

$$\begin{aligned} & \int dM_1 \left[\frac{3}{2}\left(\frac{\vec{r}}{r}\cdot\vec{\rho}_1\right)^2 - \frac{1}{2}\bar{\rho}_1^2\right] \\ = & \left(\frac{A_1 + B_1}{2} - C_1\right) P_2(\sin\beta_1) + \frac{1}{4}(B_1 - A_1) P_2^2(\sin\beta_1)\cos\lambda_1 \end{aligned} \tag{375}$$

$$\begin{aligned} & \int dM_2 \left[\frac{3}{2}\left(\frac{\vec{r}}{r}\cdot\vec{\rho}_2\right)^2 - \frac{1}{2}\bar{\rho}_2^2\right] \\ = & \left(\frac{A_2 + B_2}{2} - C_2\right) P_2(\sin\beta_2) + \frac{1}{4}(B_2 - A_2) P_2^2(\sin\beta_2)\cos\lambda_2 \end{aligned} \tag{376}$$

したがって，

$$\begin{aligned} U = & \frac{k^2 M_1 M_2}{r} \\ & + \underbrace{\frac{k^2 M_1}{r^3}\left[\left(\frac{A_1 + B_1}{2} - C_1\right) P_1(\sin\beta_1) + \frac{1}{4}(B_1 - A_1) P_2^2(\sin\beta_1)\cos 2\lambda_1\right]}_{[1]} \\ & + \underbrace{\frac{k^2 M_2}{r^3}\left[\left(\frac{A_2 + B_2}{2} - C_2\right) P_1(\sin\beta_2) + \frac{1}{4}(B_2 - A_2) P_2^2(\sin\beta_2)\cos 2\lambda_2\right]}_{[2]} \end{aligned} \tag{377}$$

相対運動

$$\vec{r} = \vec{R}_2 - \vec{R}_1 \tag{378}$$

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{r}} &= \ddot{\vec{R}}_1 - \ddot{\vec{R}}_2 = \frac{1}{M_2}\frac{\partial U}{\partial \vec{R}_1} - \frac{1}{M_1}\frac{\partial U}{\partial \vec{R}_2} \\ &= \frac{\partial}{\partial \vec{r}}\left\{\frac{k^2 M_1}{r} + \frac{k^2}{r^3}[1] + \frac{k^2}{r^3}\frac{M_1}{M_1}[2] + \frac{k^2 M_2}{r} + \frac{k^2}{r^3}[2] + \frac{k^2}{r^3}\frac{M_2}{M_1}[1]\right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial \vec{r}}\left\{\frac{k^2(M_1 + M_2)}{r} + \frac{k^2(M_1 + M_2)}{r M_1}[1] + \frac{k^2(M_1 + M_2)}{r M_2}[2]\right\} \\ &= \frac{\partial}{\partial \vec{r}}\left[\frac{M_1 + M_2}{M_1 M_2} U\right] \end{aligned} \tag{379}$$

ここで，

$$m = \frac{M_1 + M_2}{M_1 M_2}, \quad \mu = k^2(M_1 + M_2) \tag{380}$$

とおくと，

$$m\ddot{\vec{r}} = \frac{\partial U}{\partial \vec{r}}, \quad U = \mu m \left\{ \frac{1}{r} + \frac{1}{rM_1}[1] + \frac{1}{rM_1}[2] \right\} + \mathcal{O}(3\text{次}) \tag{381}$$

さて，並進運動を分離すれば[27] ，

$$T = \frac{m}{2}\dot{\vec{r}}^2 + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}(A_j\omega_{A_j}^2 + B_j\omega_{B_j}^2 + C_j\omega_{C_j}^2) \tag{382}$$

運動方程式

$$\left.\begin{array}{ll} \vec{p} = \frac{\partial}{\partial}\vec{r}(U-T) & \dot{\vec{r}} = -\frac{\partial}{\partial \vec{p}}(U-T) \\ \dot{p}_{\psi_j} = \frac{\partial}{\partial \psi_j}(U-T) & \dot{\psi}_j = -\frac{\partial}{\partial p_{\psi_j}}(U-T) \\ \dot{p}_{\theta_j} = \frac{\partial}{\partial \theta_j}(U-T) & \dot{\theta}_j = -\frac{\partial}{\partial p_{\theta_j}}(U-T) \\ \dot{p}_{\varphi_j} = \frac{\partial}{\partial \varphi_j}(U-T) & \dot{\varphi}_j = -\frac{\partial}{\partial p_{\varphi_j}}(U-T) \end{array}\right\} \quad j = 1,2 \tag{383}$$

正準変換[28]

$$(\vec{p}, \vec{r}) \to (\vec{L}, \vec{\ell}) \quad (Delauney) \tag{384}$$

$$(\vec{p}_{\psi_j}, \vec{\psi}_j) \to (\vec{L}_j, \vec{\ell}_j) \quad (Andoyer) \tag{385}$$

$$\left.\begin{array}{l} -\frac{1}{2m}\left(p_r^2 + \frac{1}{r^2}p_\beta^2 + \frac{1}{r^2\cos^2\beta}p_\lambda^2\right) + \frac{\mu m}{r} = \frac{\mu m}{2a} = \frac{\mu^2 m^3}{2L^2} \\ \left(p_\beta^2 + \frac{p_\lambda^2}{\cos^2\lambda}\right)^{1/2} = G \\ p_\lambda = H \end{array}\right\} \tag{386}$$

$$\left.\begin{array}{l} p_{\varphi_j} = L_j \\ \left[p_{\theta_j}^2 + p_{\varphi_j}^2 + (p_{\psi_j} - p_{\varphi_j}\cos\theta_j)^2\frac{1}{\sin^2\theta_j}\right]^{1/2} = G_j \\ p_{\psi_j} = H_j \end{array}\right\} \quad j = 1,2 \tag{387}$$

母関数

$$\begin{aligned} S &= S(r, \beta, \lambda, \vec{\psi}_1, \vec{\psi}_2, \vec{L}; \vec{L}_1, \vec{L}_2) \\ &= \sum_{j=1}^{2}\left\{ L_j\varphi_j + H_j\psi_j - \int_{\theta_j^*}^{\theta}\left[G_j^2 - L_j^2 - \frac{1}{\sin^2\theta_j}(H_j - L_j\cos\theta_j)^2\right]^{1/2}\right\} d\theta_j \\ &\quad + H\lambda + \int_0^\beta \left[G^2 - \frac{H^2}{\cos^2\beta}\right] d\beta + \int_{r_*}^{r}\left(-\frac{\mu^2 m^4}{L^2} + \frac{2\mu m^2}{r} - \frac{G^2}{r^2}\right) dr \end{aligned} \tag{388}$$

これより，

$$(\vec{\ell}, \vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2) = \frac{\partial S}{\partial(\vec{L}, \vec{L}_1, \vec{L}_2)} \tag{389}$$

[27] 回転エネルギーは乗っている座標系によらない．

[28] 普通 Delauney では $\frac{\mu m}{2a}$ を $m = 1$ の単位質量で定義するので，次元に注意．

$$\ell = n(t-t_0), \quad g = \omega, \quad h = \Omega, \quad n^2a^3 = \mu \tag{390}$$

運動方程式は，

$$\frac{d}{dt}(\vec{L}, \vec{L}_j) = \frac{\partial F}{\partial(\vec{\ell}, \vec{\ell}_j)}, \quad \frac{d}{dt}(\vec{\ell}, \vec{\ell}_j) = -\frac{\partial F}{\partial(\vec{L}, \vec{L}_j)} \tag{391}$$

$$F = \underbrace{\frac{\mu^2 m^3}{2L^2}}_{\text{Kepler}} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2}\Bigg[\underbrace{\left(\frac{1}{C_j} - \frac{1}{2A_j} - \frac{1}{2B_j}\right)L_j^2 + \left(\frac{1}{2A_j} + \frac{1}{2B_j}\right)G_j^2}_{\text{自転}}$$
$$+ \underbrace{\left(\frac{1}{2B_j} - \frac{1}{2A_j}\right)(G_j^2 - L_j^2)\cos 2\ell_j}_{\text{非軸対称自転}}\Bigg]$$
$$+ \underbrace{\frac{\mu m}{r^3}\sum_{j=1}^{2}\left[\frac{A_j + B_j - 2C_j}{2M_j}P_2(\sin\beta_j) + \frac{B_j - A_j}{4M_j}P_2^2(\sin\beta_j)\cos 2\lambda_j\right]}_{\text{摂動 (相互作用)}}$$
$$+\mathcal{O}(\text{3 次の調和項}) \tag{392}$$

ここで，

$$L = m\sqrt{\mu a}, \quad G = L\sqrt{1-e^2}, \quad H = G\cos I \tag{393}$$

Order

Kepler	自転	摂動
~ 1	$\frac{M_j}{m}\left(\frac{R_j}{a}\right)^2\left(\frac{\omega_j}{n}\right)^2$	$\frac{2C_j-(A_j+B_j)}{C_j}\left(\frac{R_j}{a}\right)^2$

4.4.1 M_2 の公転運動

Kepler	摂動
~ 1	$\frac{2C_j-(A_j+B_j)}{C_j}\left(\frac{R_j}{a}\right)^2$

- M_1：地球，M_2：人工衛星

$$\frac{2C_1 - (A_1+B_1)}{C_1} \sim 10^{-3}, \quad \frac{R_1}{a} \sim 1 \quad \Rightarrow \quad 10^{-3}\text{の摂動} \tag{394}$$

- M_1：地球，M_2：月

$$\frac{2C_1-(A_1+B_1)}{C_1}\sim 10^{-3},\quad \frac{R_1}{a}\sim\frac{1}{60}\quad\Rightarrow\quad 10^{-7}(100\mathrm{m})\text{の摂動}\tag{395}$$

$$\frac{2C_2-(A_2+B_2)}{C_2}\sim 10^{-4},\quad \frac{R_2}{a}\sim\frac{1}{180}\quad\Rightarrow\quad 10^{-9}(1\mathrm{m})\text{の摂動}\tag{396}$$

4.4.2 M_j の自転運動

自転	摂動
$\frac{M_j}{m}\left(\frac{R_j}{a}\right)^2\left(\frac{\omega_j}{n}\right)^2$	$\frac{2C_j-(A_j+B_j)}{C_j}\left(\frac{R_j}{a}\right)^2$

- M_1：地球，M_2：人工衛星

  M_1 の自転

$$\frac{m}{M_1}\sim 0\tag{397}$$

  M_2 の自転

$$\frac{m}{M_2}\sim 1,\quad \frac{2C_1-(A_1-B_1)}{C_1}\sim 1,\quad \frac{\omega_1}{n}\sim\frac{1}{60}\quad\Rightarrow\quad 3\times 10^4\tag{398}$$

- M_1：地球，M_2：月

  M_1 の自転

$$\frac{1}{80}\times 10^{-3}\times\left(\frac{1}{30}\right)^2\quad\Rightarrow\quad 10^{-8}\quad\text{歳差運動}\tag{399}$$

  M_2 の自転

$$1\times 10^{-4}\times 1\quad\Rightarrow\quad \mathrm{Resonance}\ \text{を考慮しないといけない}\tag{400}$$

4.5 U の展開

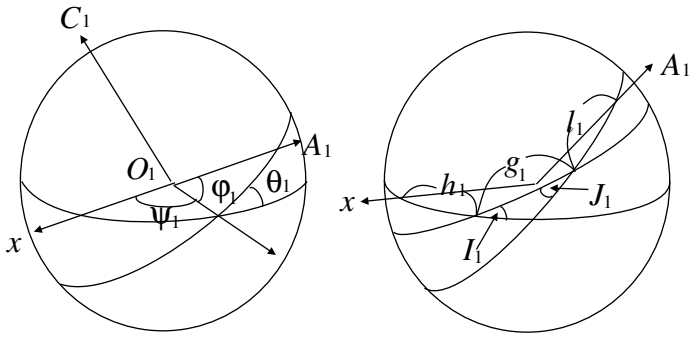

Figure 41: $\psi_1, \theta_1, \varphi_1, h_1, g_1, \ell_1, I_i, J_1$

$$\overrightarrow{\mathrm{O_1A_1}} = \begin{pmatrix} -\sin\varphi_1\cos\theta_1\sin\psi_1 + \cos\varphi_1\cos\psi_1 \\ \sin\varphi_1\cos\theta_1\cos\psi_1 + \cos\varphi_1\sin\psi_1 \\ \cos\varphi_1\sin\theta_1 \end{pmatrix} \tag{401}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{O_1B_1}} = \begin{pmatrix} -\cos\varphi_1\cos\theta_1\sin\psi_1 - \sin\varphi_1\sin\psi_1 \\ \cos\varphi_1\cos\theta_1\cos\psi_1 - \sin\varphi_1\cos\psi_1 \\ \sin\varphi_1\sin\theta_1 \end{pmatrix} \tag{402}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{O_1C_1}} = \begin{pmatrix} \sin\theta_1\sin\psi_1 \\ -\sin\theta_1\cos\psi_1 \\ \cos\theta_1 \end{pmatrix} \tag{403}$$

さて，

$$\begin{aligned} \sin\theta_1\sin\psi_1 &= \sin I_1\cos J_1\sin h_1 + \frac{1}{2}(1+\cos I_1)\sin J_1\sin(g_1+h_1) \\ &\quad + \frac{1}{2}(1-\cos I_1)\sin J_1\sin(g_1-h_1) \qquad (404) \\ \sin\theta_1\cos\psi_1 &= \sin I_1\cos J_1\cos h_1 + \frac{1}{2}(1+\cos I_1)\sin J_1\cos(g_1+h_1) \\ &\quad + \frac{1}{2}(1-\cos I_1)\cos J_1\sin(g_1-h_1) \qquad (405) \\ \cos\theta_1 &= \cos I_1\cos J_1 - \sin I_1\cos J_1\cos g_1 \qquad (406) \end{aligned}$$

一方，

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{O_1O_2}} &= \vec{r} = (x,y,z) \qquad (407) \\ \frac{x}{r} &= \frac{1}{2}(1-\cos I)\cos(f+g-h) + \frac{1}{2}(1+\cos I)\cos(f+g+h) \qquad (408) \end{aligned}$$

$$\frac{y}{r} = -\frac{1}{2}(1-\cos I)\sin(f+g-h)+\frac{1}{2}(1+\cos I)\sin(f+g+h) \tag{409}$$

$$\frac{z}{r} = \sin I \sin(f+g) \tag{410}$$

λ, β は

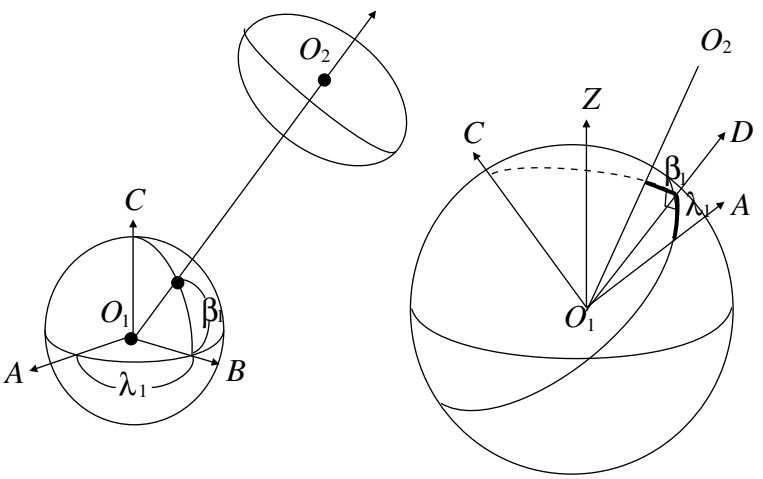

Figure 42: β, λ

$$\begin{aligned}
\sin\beta_1 &= \sin I \sin I_1 \cos J_1 \sin(f+g) \\
&\quad - \sum_{\epsilon=\pm1} \frac{1}{2} \sin I \sin I_1 \sin J_1 \sin(f+g+\epsilon g) \\
&\quad + \sum_{\epsilon,\delta=\pm1} \frac{\epsilon\delta}{4}(1+\epsilon\cos I)(1-\delta\cos I_1)\sin J_1 \sin[f+g+\epsilon(h-h_1)+\epsilon\delta g_1] \qquad (411)\\
\cos\beta_1\cos\lambda_1 &= -\sum_{\epsilon=\pm1} \frac{\epsilon}{2} \sin I \cos I_1 \sin J_1 \cos(f+g+\epsilon\ell_1) \\
&\quad - \sum_{\epsilon,\delta=\pm1} \sin I \sin I_1 (1+\delta\cos J_1)\cos(f+g+\epsilon g_1+\epsilon\delta\ell_1) \\
&\quad + \sum_{\epsilon,\delta} \frac{\delta}{4}(1+\epsilon\cos I)\sin I_1 \sin J_1 \cos[f+g+\epsilon(h-h_1)+\epsilon\delta\ell_1] \\
&\quad + \sum_{\epsilon,\delta,\gamma} \frac{1}{8}(1+\epsilon\cos I)(1-\delta\cos I_1)(1+\gamma\cos J_1) \\
&\quad \times \cos[f+g+\epsilon(h-h_1)+\epsilon\delta g_1+\epsilon\delta\gamma\ell_1] \qquad (412)
\end{aligned}$$

D'Alembert の性質

- $I_1 = 0$ で
  - g_1, h_1 は意味がない
  - $g_1 + h_1$ は意味がある

- λ_1, β_1 は $I_1 = 0$ でも存在し確定するから g_1 だけの term は必ず $I_1 = 0$ の時には消える．

$$\cos\beta_1 \sin\lambda_1 = \cos\beta_1 \cos\left(\lambda_1 + \frac{\pi}{2}\right) \equiv \cos\beta_1 \cos\lambda|_{\ell_1 \to \ell_1 + \frac{\pi}{2}} \tag{413}$$

ここで $\ell_1 + \lambda_1$ だけが意味がある．
ルジャンドルの計算

$$P_n^m(\sin\beta)\exp[im\lambda] \equiv P_n^{(m)}(\sin\beta)\cos^m\beta\exp[im\lambda] \tag{414}$$

すると，

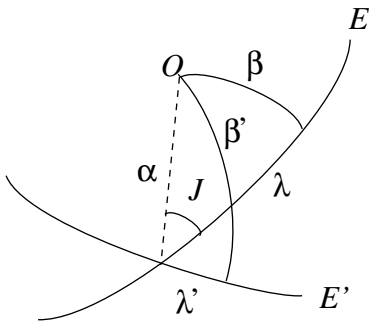

Figure 43: $\alpha, \beta, \lambda, \beta', \gamma'$

$$\cos\alpha = \cos\beta\cos\lambda = \cos\beta'\cos\lambda' \tag{415}$$

$$\sin\alpha\cos J_1 = \cos\beta\sin\lambda \tag{416}$$

$$\sin\alpha\cos(I+J) = \cos\beta'\sin\lambda' \tag{417}$$

$$\sin\alpha = \frac{\sin\beta'}{\sin(I+J)} = \frac{\sin\beta}{\sin J} \tag{418}$$

これより I, J を消去すると，

$$\begin{aligned}\cos\beta\sin\lambda &= \sin\alpha\cos(J+I-I)\\ &= \sin\alpha\sin(J+I)\sin I + \sin\alpha\cos(I+J)\cos I\\ &= \cos\beta'\sin\lambda'\cos I + \sin\beta'\sin I \qquad (419)\\ \sin\beta &= \sin\alpha\sin(J+I-I)\\ &= \sin\alpha\sin(J+I)\cos I - \sin\alpha\cos(J+I)\sin I\\ &= \sin\beta'\cos I - \cos\beta'\sin\lambda'\sin I \qquad (420)\end{aligned}$$

$$\cos\beta\exp[i\lambda] = \cos\beta'\sin\lambda' + i\left[\sin I\sin\beta' + \cos I\cos\beta'\sin\lambda'\right] \tag{421}$$

$$\cos\beta\exp[im\lambda] = \left[\sin I\sin\beta' + \cos I\cos\beta'\sin\lambda'\right]^m \tag{422}$$

$$\begin{aligned}P_n^m(\sin\beta)\exp[im\lambda] &= \left[\sin I\sin\beta' + \cos I\cos\beta'\sin\lambda'\right]^m\\ &\quad \times P_n^{(m)}(\sin\beta)(\sin\beta\cos I - \cos\beta'\sin\lambda'\sin I) \qquad (423)\end{aligned}$$

さて，$Y_{\ell m}$ の加法定理から，

$$P_n^m(\sin\beta)e^{im\left(\lambda+\frac{\pi}{2}\right)} = \sum_{j=0}^{m}\sum_{\epsilon=\pm1} K_j^{nm}(I,\epsilon)P_n^j(\sin\beta')e^{ij\left(\epsilon\lambda+\frac{\pi}{n}\right)} \tag{424}$$

と線形結合で書ける．ここで，

$$K_{n-2p}^{nm}(I,\epsilon) = (-1)^{\left[\frac{n-m}{2}\right]}\frac{(2p)!!}{(2n-2p-1)!!}F_{nmp}(\epsilon\sin I,\epsilon\cos I) \tag{425}$$

$$K_{n-2p-1}^{nm}(I,\epsilon) = (-1)^{\left[\frac{n-m}{2}\right]}\frac{2(2p)!!}{(2n-2p-1)!!}\frac{d}{dI}\sum_{k=0}^{p}\epsilon F_{nmk}(\epsilon\sin I,\epsilon\cos I) \tag{426}$$

ここで F_{nmk} は Izsak の多項式．これは回転の表現と密接に結び付いている．

n	m	k	K_k^{nm}
2	0	0	$1-\frac{3}{2}\sin^2 I$
2	0	1	$\frac{\epsilon}{2}\sin I\cos I$
2	0	2	$\frac{1}{8}\sin^2 I$
2	1	0	$-3\sin I\cos I$
2	1	1	$-\frac{\epsilon}{2}(1+\epsilon\cos I)(1-2\epsilon\cos I)$
2	1	2	$\frac{\epsilon}{4}\sin I(1+\epsilon\cos I)$
2	2	0	$3\sin^2 I$
2	2	1	$-\sin I(1+\epsilon\cos I)$
2	2	2	$\frac{1}{4}(1+\epsilon\cos I)^2$

Table 2: Izsak の多項式

1. E：M_1 赤道面 β_1,γ_1
   E'：G_1 赤道面 B_1,Γ_1

$$P_n^m(\sin\beta_1)e^{im\left(\lambda_1+\ell_1+\frac{\pi}{2}\right)} = \sum_{k=0}^{n}\sum_{\gamma=\pm1} K_k^{nm}(J_1,\gamma)P_k^m(\sin B_1)e^{ik\left(\gamma\Lambda_2+\frac{\pi}{2}\right)} \tag{427}$$

$\gamma=\pm1$ より，

$$e^{ik\left(\gamma\Lambda_2+\frac{\pi}{2}\right)} = \gamma^{-k}e^{ik\gamma\left(\Lambda_1+\frac{\pi}{2}\right)} \tag{428}$$

2. E：G_1 赤道面 B_1,Γ_1
   E'：基準面 B,Γ

$$P_n^m(\sin B_1)e^{ik\gamma\left(\Lambda_1+g_1+\frac{\pi}{2}\right)} = \sum_{p=0}^{k}\sum_{\delta=\pm1} K_p^{nk}(I_1,\delta)P_n^p(\sin B)\underbrace{e^{ip\gamma\left(\delta\Lambda+\frac{\pi}{2}\right)}}_{\equiv\delta^{-p}e^{ip\gamma\delta\left(\Lambda+\frac{\pi}{2}\right)}} \tag{429}$$

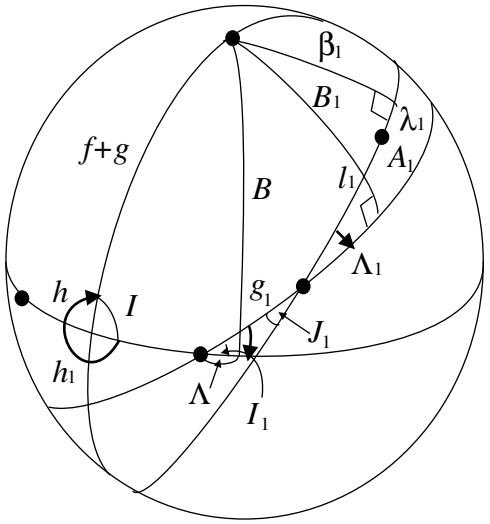

Figure 44: 赤道面，基準面，軌道面の対応

3. E：基準面 B, Λ
   E'：軌道面 $O, f+g$

$$P_n^p(\sin B)e^{ip\gamma\delta\left(\Lambda+(h_1-h)+\frac{\pi}{2}\right)} = \sum_{q=0}^{p}\sum_{\epsilon=\pm1} K_q^{np}(-I,\epsilon)P_n^q(0)e^{iq\gamma\delta\left[\epsilon(f+g)+\frac{\pi}{2}\right]} \tag{430}$$

   $f+g$ の向きを変えれば $2\pi - I$ だけ回転した事になる．

4. まとめ

$$\begin{aligned} P_n^m(\sin\beta_1)e^{im\lambda_1} &= e^{-im\left(\ell_1+\frac{\pi}{2}\right)} \\ &\quad\times\sum_{k=0}^{n}\sum_{\gamma=\pm1} K_k^{nm}(J_1,\gamma)\gamma^k e^{-ik\gamma_1 g_1} \\ &\quad\times\sum_{p=0}^{n}\sum_{\delta=\pm1} K_p^{nk}(I_1,\delta)\delta^{-p}e^{-ip\gamma\delta\left(\overline{h_1-h}\right)} \\ &\quad\times\sum_{q=0}^{n}\sum_{\epsilon=\pm1} K_q^{np}(-I,\epsilon)P_n^q(0)e^{iq\gamma\delta\left[\epsilon(f+g)+\frac{\pi}{2}\right]} \\ &= \sum_{p,q,r=0}^{n}\sum_{\gamma,\delta,\epsilon=\pm1} \gamma^{r-p}\delta^{r-q}K_p^{nm}(J_1,\gamma)K_q^{np}(I_1,\delta)K_r^{nq}(-I,\epsilon) \\ &\quad\times\exp\left\{-i\left[m\left(\ell+\frac{\pi}{2}\right)+p\gamma g_1 q\gamma\delta\left(h_1-h\right)-r\left(\gamma\delta\epsilon\overline{f+g}+\frac{\pi}{2}\right)\right]\right\} \end{aligned} \tag{431}$$

   ここで，

$$P_n^m(0) = \begin{cases} 0 & n-m = \text{odd} \\ (-1)^{\left[\frac{n+m}{2}\right]}\frac{(n+m-1)!!}{(n-m)!!} & n-m = \text{even} \end{cases} \tag{432}$$

$$p = 0 \quad \rightarrow \quad \gamma = 1 \tag{433}$$

$$q = 0 \quad \rightarrow \quad \gamma\delta = 1 \tag{434}$$

$P_n^m(\sin\beta_1)e^{im\lambda_1}$

λ_1, β_1 は $-\vec{r} = \overrightarrow{\mathrm{O_2O_1}}$ の経緯度だから，

$$g \rightarrow g + \pi \Rightarrow = (\qquad\qquad)|_{1\leftrightarrow 2} \times \underbrace{e^{-i(-r\gamma\delta\epsilon)\pi}}_{=(-1)^r} \tag{435}$$

よって，

$$P_n^m(\quad{}_2)e^{im\lambda_1} = P_n^m(\sin\beta_1)e^{im\lambda_1}\Big|_{1\leftrightarrow 2} \times (-1)^r \tag{436}$$

例：

$$\begin{aligned}
P_2(\sin\beta_1) &= P_2(\cos J_1)\left[-\frac{1}{2} + \frac{3}{8}(1 + \cos^2 I + \cos^2 I_1 - 3\cos^2 I\cos I_1)\right. \\
&\quad -\frac{3}{8}\sin 2I \sin 2I_1 \cos(h_1 - h) - \frac{3}{8}\sin^2 I \sin^2 I_1 \cos 2(h_1 - h) \\
&\quad \left.+\frac{3}{8}\sin^2 I(1 - 3\cos^2 I_1)\cos(2f + 2g) + \cdots\right] \\
&\quad -\frac{3}{16}(1 - 3\cos^2 I)\sin 2I_1 \sin 2J_1 \cos g_1 \\
&\quad +\frac{3}{16}(1 - 3\cos^2 I)\sin^2 I_1 \sin^2 J_1 \cos 2g_1 + \cdots (39\text{項})
\end{aligned} \tag{437}$$

$$\begin{aligned}
P_2^2(\sin\beta_1)\cos 2\lambda_1 &= \frac{3}{8}(1 - 3\cos^2 I)(1 - 3\cos^2 I_1)\sin^2 J_1 \cos 2\ell_1 \\
&\quad + \sum_{\epsilon=\pm 1}\frac{9}{16}\sin 2I \sin 2I_1 \sin^2 J_1 \cos(h - h_1 + \epsilon 2\ell_1) \\
&\quad + \sum \frac{9}{16}\sin^2 I \sin^2 I_1 \sin^2 J_1 \cos(2h - 2h_1 + \epsilon 2\ell_1) \\
&\quad - \sum \frac{9}{16}\sin^2 I(1 - 3\cos^2 I_1)\sin^2 J_1 \cos(2f + 2g + \epsilon 2\ell_1) \\
&\quad - \sum \frac{\epsilon 3}{8}(1 - \cos^2 I)\sin 2I_1 \sin J_1(1 + \epsilon\cos J_1)\cos(g_1 + \epsilon 2\ell_1) \\
&\quad + \cdots (67\text{項})
\end{aligned} \tag{438}$$

4.6 地球の自転運動

M_1：地球，$A_1 = B_1 < C_1$

M_2：月，$A_2 = B_2 = C_2$

地球の形状の影響による月の公転運動への影響

$$1 : \frac{2C_1 - 2A_1}{C_1}\left(\frac{R_1}{a}\right)^2 \sim 1 : 5 \times 10^{-6} \tag{439}$$

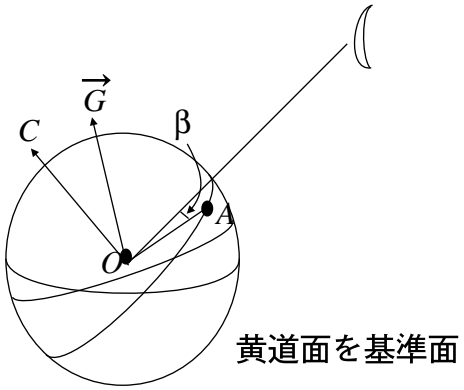

Figure 45: 黄道面を基準面

よって，これは無視する．しかし太陽の影響は無視できない．Poincaré の定理[29] により長年変化は g, h にのみおきる（平均運動を考慮する）．運動方程式

$$\frac{d}{dt}(L_1, G_1, H_1, K) = \frac{\partial F}{\partial(\ell_1, g_1, h_1, k)}, \quad \frac{d}{dt}(\ell_1, g_1, h_1, k) = -\frac{\partial F}{\partial(L_1, G_1, H_1, K)} \tag{440}$$

$$F = \underbrace{-K - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{C_1} - \frac{1}{A_1}\right) L_1^2 + \frac{1}{A_1} G_1^2\right]}_{F_0} \underbrace{- \frac{\mu m}{r^3} \frac{C_1 - A_1}{M_1} P_2(\sin \beta_1)}_{F_1} \tag{441}$$

β, r を介して月の運動は入って来るので $\beta = \beta(t), r = r(t)$ となり，F が t に explicit になる．これを避けるため，$k = t$ とおき，F が t に explicit に依存しないように形式的に (k, K) をとる．ここで K は月のエネルギー．

正準変換

$$L_1, G_1, H_1, K; \ell_1, g_1, h_1, k \to L_1', G_1', H_1', K'; \ell_1', g_1', h_1', k' \tag{442}$$

母関数

$$S_1 = S_1(L_1', G_1', H_1', K'; \ell_1', g_1', h_1', k') \tag{443}$$

$$(L_1, G_1, H_1, K) = (L_1', G_1', H_1', K') + \{(L_1', G_1', H_1', K'), S_1\} + 2 \text{ 次} \tag{444}$$

$$(\ell_1, g_1, h_1, k) = (\ell_1', g_1', h_1', k') + \{\ell_1', g_1', h_1', k'), S_1\} + 2 \text{ 次} \tag{445}$$

S_1 は K' を含まないから $k = k'$．

補助方程式

$$\frac{d}{d\tau}(\vec{L}_1', K') = \frac{\partial F_0^*}{\partial(\vec{\ell}_1', k')}, \quad \frac{d}{d\tau}(\vec{\ell}_1', k') = -\frac{\partial F *_0}{\partial(\vec{L}_1', K \prime)}$$

$$F_0^* = -K - \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{C_1} - \frac{1}{A_1}\right) L_1'^2 + \frac{1}{A_1} G_1'^2\right] \tag{446}$$

[29] 惑星の長年変化についての定理．

ここで $F_0^* = F_0|_{L\to L'}$．この解は，

$$L_1', G_1', H_1', h_1' = \text{const.} \quad (\text{in}\tau) \tag{447}$$

$$\ell_1' = n_1\tau + \text{const.} \quad n_1 = \left(\frac{1}{C_1} - \frac{1}{A_1}\right) L_{10} \tag{448}$$

$$g_1' = \omega_1\tau + \text{const.} \quad \omega_1 = \frac{1}{A_1} G_{10}' \tag{449}$$

月の運動は given とすると（$t \to k'$ として t に implicit としておく），

$$\ell = nk' + \ell_0 \quad n \Rightarrow \text{近点月} \tag{450}$$

$$g = n_g k' + g_0 \quad n_g \Rightarrow \sim 10\text{y} \tag{451}$$

$$h = h_h k' + h_0 \quad n_h \Rightarrow 18.6\text{y} \tag{452}$$

$$\frac{n_1}{\omega_1} = -\frac{C_1 - A_1}{C_1} \underbrace{\frac{L_1'}{G_1'}}_{\cos J_1'} \sim \frac{1}{30} \tag{453}$$

$$J_1' \sim 0.''2 \quad \text{地球} \tag{454}$$

ここで，ω_1 は 1 極星日周期．実際は，剛体でないので n_1 の周期（極運動）はほぼ 420 日 (Chandler 周期)．さて，

$$F_1 = -\frac{\mu m}{r^2} \frac{C_1 - A_1}{M_1} P_1(\sin\beta_1) \tag{455}$$

今の場合，

$$\begin{array}{cc} h - h_1 & 18.6\text{y} \\ 2f + 2g & \text{半月} \\ g_1 & 1\,\text{日} \\ 2g_1 & \text{半日} \end{array} \tag{456}$$

摂動

$$-\frac{dS_1}{dt} + F_1(L_1', G_1', H_1', \ell_1', g_1', h\prime_1, k') = F_1^* \tag{457}$$

$$\begin{aligned} F_1^* = \langle F_1\rangle_\tau &= -\frac{\mu m}{a^3(1-e^2)^{3/2}} \frac{C_1 - A_1}{M_1} P_2(\cos J_1') \\ &\times \left[-\frac{1}{2} + \frac{3}{8}(1 + \cos^2 I + \cos^2 I_1' - 3\cos^2 I \cos^2 I_1')\right] \end{aligned} \tag{458}$$

$$\begin{aligned} S_1 &= \int d\tau (F_1 - \langle F_1\rangle) \\ &= \frac{\mu m}{a^3(1-e^2)^{3/2}} \frac{C_1 - A_1}{M_1} P_2(\cos J_1') \left[\frac{3}{8}\sin 2I \sin 2I_1' \frac{1}{n_h}\sin(h - h_1')\right. \\ &\left. + \frac{3}{8}\sin^2 I \sin^2 I_1' \frac{1}{2n_h}\sin 2(h - h_1')\right] + \cdots \end{aligned} \tag{459}$$

解

$$L_1', G_1', H_1', K' = \text{const.} \quad \text{int} \tag{460}$$

$$\ell_1' = \left(n_1 + \frac{\partial F_1^*}{\partial L_1'}\right) t + \text{const.} \tag{461}$$

$$g_1' = \left(\omega_1 + \frac{\partial F_1^*}{\partial G_1'}\right) t\text{const.} \tag{462}$$

$$h_1' = -\frac{\partial F_1^*}{\partial H_1'} t + \text{const.} \Leftarrow \text{摂動によってゆっくり変わる} \tag{463}$$

$$k' = t + \text{const.} \tag{464}$$

$$\begin{aligned} -\frac{\partial F_1^*}{\partial H_1'} &= \frac{\mu m}{a^3(1-e^2)^{3/2}} \frac{C_1 - A_1}{M_1} \frac{1}{G_1'} P_2(\cos J_1') \frac{3}{4} \cos I_1'(1 - 3\cos^2 I) \\ &= n \cdot \frac{n}{\omega_1} \frac{M_2}{M_1 + M_2} \frac{C_1 - A_1}{A_1} P_2(\cos J_1') \cos I_1'(1 - 3\cos^2 I) \frac{1}{1-e} \end{aligned} \tag{465}$$

$$\begin{aligned} \frac{\left(-\frac{\partial F_1^*}{\partial H_1'}\right)}{\omega_1} &= \left(\frac{1}{27.6}\right)^2 \frac{1}{81} \frac{1}{303} \frac{3}{4} \cos 23.27(1 - 3\cos^2 5.6\prime) \frac{1}{1 - 0.05} \\ &= -0.728 \times 10^{-6} \end{aligned} \tag{466}$$

$$\omega_1 = 4\overset{\prime\prime}{.}74 \times 10^8/\text{y} \Rightarrow -\frac{\partial F_1^*}{\partial H_1'} = -34\overset{\prime\prime}{.}5/\text{y} \tag{467}$$

total での ω_1 は，

$$\omega_1 \sim -50\overset{\prime\prime}{.}2/\text{y} \tag{468}$$

これは luni-solar precession constant (月-太陽歳差定数) と呼ばれる．

$$\begin{aligned} S_1 &= int(F_1 - \langle F_1 \rangle) d\tau \\ &= \mu m \frac{C_1 - A_1}{M_1 a^3} \left\{ P_2(\cos J_1) \left[\frac{3}{8} \sin 2I \sin 2I_1 \frac{\sin(h - h_1')}{n_h} \right.\right. \\ &\quad + \frac{3}{8} \sin^2 I \sin^2 I_1 \frac{\sin 2(h - h_1')}{2n_h} - \frac{3}{8} \sin^2 I (1 - 3\cos^2 I_1) \frac{\sin(2\ell + 2g')}{n + n_h} + \cdots \left.\right] \\ &\quad \left. + \frac{3}{16}(1 - 3\cos^2 I) \sin 2I_1 \sin 2J_1 \frac{\sin g_1'}{\omega_1} - \frac{3}{16}(1 - 3\cos^2 I) \sin^2 I_1 \sin^2 J_1 \frac{\sin 2g_1'}{2\omega_1} + \cdots \right\} \end{aligned} \tag{469}$$

ここで $e = 0$ とする．

章動 (Nutation)

$$\begin{aligned} h_1 &= h_1' + \{h_1', S_1\} = h_1' - \frac{\partial S_1}{\partial H_1'} = h_1' - \frac{1}{G_1'} \frac{\partial S_1}{\partial(\cos I_1)} \\ &= h_1' + \mu m \frac{C_1 - A_1}{M_1 a^3 G_1'} P_2(\cos J_1) \left[\frac{3}{4} \sin 2I \frac{\cos 2I_1}{\sin I_1} \underbrace{\frac{\sin(h - h_1')}{n_h}}_{18.6/\text{y}} \right. \end{aligned}$$

$$+\frac{3}{4}\sin^2 I\cos I_1\underbrace{\frac{\sin 2(h-h_1')}{2n_h}}_{9.3/\mathrm{y}}-\frac{3}{4}\sin^2 I3\cos I_1\underbrace{\frac{\sin 2(\ell+g)}{2n+2n_g}}_{\text{半月}}\Bigg] \tag{470}$$

ここで $h=18.6\mathrm{y}, h_1=21000\mathrm{y}$．さて，

$$\begin{aligned}\mu m\frac{C_1-A_1}{M_1a^3G_1'} &= \frac{n}{\omega_1}\frac{M_2}{M_1+M_2}\frac{C_1-A_1}{A_1}n\\ &= \left(\frac{1}{27.6}\right)\left(\frac{1}{81}\right)\left(\frac{1}{303}\right)n\end{aligned} \tag{471}$$

最大振幅はこれに，

$$\frac{3}{4}\sin 10.18'\frac{\cos 46.54'}{\sin 23.27'}\frac{18.6\mathrm{y}}{27.6\mathrm{d}} \tag{472}$$

をかけたもので，

$$8.38\times 10^{-5}\mathrm{rad}\sim 17''.3 \tag{473}$$

これは periodic で最大のもの．ここで ω_1 は 1 極星日，n は 1 近点月．

$$\begin{aligned}I_{1,\mathrm{osc}} &= I_1+\{I_1,S_1\}=I_1-\frac{1}{\sin I_1}\left(\frac{1}{G_1'}\frac{\partial S_1}{\partial h_1'}-\frac{\cos I_1}{G_1'}\frac{\partial S_1}{\partial g_1'}\right)\\ &= I_1-\mu m\frac{C_1-A_1}{M_1a^3G_1'\sin I_1}P_2(\cos J_1)\\ &\quad\times\left[-\frac{3}{8}\sin 2I\sin 2I_1\frac{\cos(h-h')}{n_h}-\frac{3}{4}\sin^2 I\sin^2 I_1\frac{\cos 2(h-h_1')}{n_h}\right]\end{aligned} \tag{474}$$

最大振幅は，

$$\mu m\frac{C_1-A_1}{M_1a^3G_1'\sin I_1}\frac{3}{4}\sin 2I\cos I_1\frac{1}{n_h}\cong 9''.2 \tag{475}$$

注：J_1 は小さな量なので ℓ, g で S_1 を偏微分する時には気をつけなければならない．

4.7 水星の自転運動

Resonance の例．公転 $n=88$ 日，自転 $\omega=59$ 日 → 3:2．いま，公転面は自転面に一致すると仮定する．太陽は球対称．

$$I_2=J_2=0 \quad\Rightarrow\quad L_2=G_2=H_2,\quad \beta_2=0 \tag{476}$$

ハミルトニアンは，

$$\begin{aligned}F &= \frac{\mu^2m^3}{2L^2}-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{C_2}-\frac{1}{2A_2}-\frac{1}{2B_2}\right)L_2^2+\left(\frac{1}{2A_2}+\frac{1}{2B_2}\right)G_2^2+\left(\frac{1}{2B_2}-\frac{1}{2A_2}\right)(\underbrace{G_2^2-L_2^2}_{=0})\cos 2\ell_2\right]\\ &\quad+\frac{\mu m}{r^3}\left[\frac{A_2+B_2-2C_2}{M_2}P_2(\sin\beta_2)+\frac{B_2-A_2}{4M_2}P_2^2(\sin\beta_2)\cos 2\lambda_2\right]+\mathcal{O}(3\text{ 次})\end{aligned} \tag{477}$$

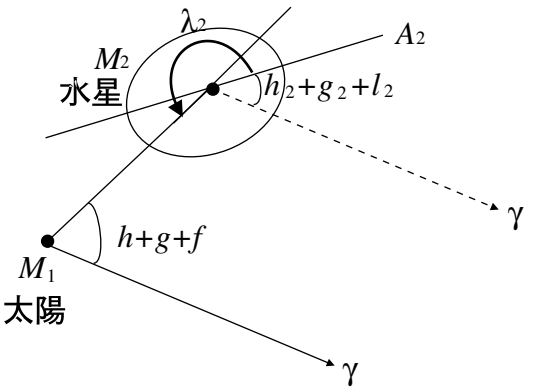

Figure 46: 水星の 3:2 共鳴

ここで，

$$P_n^m(0) = \begin{cases} 0 & n-m : \text{odd} \\ (-1)^{\left[\frac{n-m}{2}\right]} \frac{(n+1-m)!!}{(n+m)!!} & n-m : \text{even} \end{cases} \tag{478}$$

より，

$$F = \frac{\mu^2 m^3}{2L^2} - \frac{G_2^2}{C_2} + \frac{\mu m}{r^3}\left[\frac{A_2+B_2-2C_2}{4M_2} + \frac{3(B_2-A_2)}{4M_2}\cos 2\lambda_2\right] + (3\text{ 次}) \tag{479}$$

今，

$$\lambda_2 = \pi + (h+g+f) - (h_2+g_2+\ell_2) \tag{480}$$

独立変数のうち，$L_2 = G_2 = H_2$ より $\ell_2+g_2+h_2$ だけに意味がある．正準変数として，

$$\begin{pmatrix} L_2 & \ell_2 \\ G_2 & g_2 \\ H_2 & h_2 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} X & x = \ell_2+g_2+h_2 \\ Y & y = g_2+h_2 \\ Z & z = h_2 \end{pmatrix} \tag{481}$$

ととる．正準変数は $pdq = \text{const.}$ より，

$$L_2 d\ell_2 + G_2 dg_2 + H_2 dh_2 = X d(\ell_2+g_2+h_2) + Y d(g_2+h_2) + Z dh_2 \tag{482}$$

よって，

$$X = L_2, \quad Y = G_2 - L_2, \quad Z = H_2 - G_2 \tag{483}$$

すると，

$$\lambda_2 = h+g+f+\pi-x \tag{484}$$

運動方程式：

$$\frac{dX}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad \frac{dx}{dt} = -\frac{\partial F}{\partial X} \tag{485}$$

$$F = \frac{\mu^2 m^3}{2L^2} - \frac{1}{2}\frac{(X+Y)^2}{C_2} + \frac{\mu m}{r^3}\left[\frac{2C_2 - A_2 - B_2}{4M_2} + \frac{3(B_2 - A_2)}{4M_2}\cos 2(h+g+f-x)\right] \tag{486}$$

今，水星の公転は Kepler としている．よって r, h, g, f はそれをいれなければならない．

$$\frac{a^3}{r^3}\cos(2f + 2\alpha) = \sum_j C_j(e)\cos(j\ell + 2\alpha) \tag{487}$$

今，

$$n_x : n_\ell \sim 2 : 3 \tag{488}$$

なので，$3\ell - 2x$ を積分する時に critical term (small divisor)（→長年項）が出てくる．
また t をあらわに含むので，$K, k(=t)$ を導入しなければならない．
長年摂動の運動方程式：

$$\begin{pmatrix} X & x \\ K & k \end{pmatrix} \quad \to \quad \begin{pmatrix} X' & x' \\ K' & k' \end{pmatrix} \quad \text{by} \quad S_1(X', x', k') \tag{489}$$

$$\frac{d}{dt}(X, K) = \frac{\partial F}{\partial(x, k)}, \quad \frac{d}{dt}(x, k) = -\frac{\partial F}{\partial(X, K)} \tag{490}$$

$$F = -K - \frac{1}{2}\frac{(X+Y)^2}{C_2} + \frac{\mu m}{r^3}[\quad t \to k \quad] \tag{491}$$

新運動方程式：

$$\frac{d}{dt}(X', K') = \frac{\partial F^*}{\partial(x', k')}, \quad \frac{d}{dt}(x', k') = -\frac{\partial F^*}{\partial(X', K')} \tag{492}$$

$$F^* = -K' - \frac{1}{2}\frac{(X'+Y)^2}{4M_2} + \frac{\mu m}{a^3}\left[\frac{2C_2 - A_2 - B_2}{4M_2}\frac{1}{(1-e^2)^{3/2}} + \frac{3(B_2 - A_2)}{4M_2}\left(\frac{7}{2}e - \frac{123}{16}e^3\right)\cos(\underbrace{3\ell + 2\varpi - 2x}_{\text{critical term };\sigma})\right] \tag{493}$$

ここで $\ell = nk' + \text{const.}$
平衡解：

$$\frac{d\sigma}{dt} = 3n - 2\frac{dx'}{dt} = 3n + 2\frac{\partial F\ *}{\partial X'} = 3n - 2\frac{X'+Y}{C_2} = 0 \tag{494}$$

$$\frac{dX'}{dt} = \frac{\partial F^*}{dx'} = \frac{\mu m}{a^3}\frac{3(B_2 - A_2)}{2M_2}\left(\frac{7}{2}e - \frac{123}{16}e^3\right)\sin\sigma = 0 \tag{495}$$

これより，

$$\sigma = 0 \ \text{ or } \ \pi = \text{const.}, \quad 3n - 2\omega = 0 \quad \left(\omega = \frac{X' + Y}{C_2}\right) \tag{496}$$

自転と公転をいれた運動方程式：
今度は公転も同時に解く．

$$\frac{d}{dt}(L, G, H, X, Y, Z) = \frac{\partial F}{\partial(\ell, g, h, x, y, z)}, \quad \frac{d}{dt}(\ell, g, h, x, y, z) = -\frac{\partial F}{\partial(L, G, H, X, Y, Z)} \tag{497}$$

すぐ，

$$\frac{d}{dt}(L', G', H', X') = \frac{\partial F^*}{\partial(\ell', g', h', x')}, \quad \frac{d}{dt}(\ell', g', h', x') = -\frac{\partial F^*}{\partial(L', G', H', X')} \tag{498}$$

$$F^* = \frac{\mu^2 m^3}{2L'^2} - \frac{1}{2}\frac{(X+Y)^2}{C_2} + \frac{\mu m}{a^3} \times \left[\frac{2C_2 - A_2 - B_2}{4M_2}\frac{1}{(1-e^2)^{3/3}} + \frac{3(B_2 - A_2)}{4M_2}\left(\frac{7}{2}e - \frac{123}{16}e^3\right)\cos(\underbrace{3\ell' + 2g\prime + 2k'2x'}_{=\sigma})\right] \tag{499}$$

ここで，

$$L' = m\sqrt{\mu a} \Rightarrow a = \frac{L'^2}{\mu m^2}, \quad e = \sqrt{1 - \frac{G'^2}{L'^2}} \tag{500}$$

平衡解：

$$\frac{d\sigma}{dt} = -3\frac{\partial F^*}{\partial L'} - 2\frac{\partial F^*}{\partial G'} - 2\frac{\partial F^*}{\partial H'} + 2\frac{\partial F^*}{\partial X'} = 0 \tag{501}$$

$$L' = G' = H' = X' = \text{const.} \tag{502}$$

$$\frac{dX'}{dt} \propto \sin\sigma \Rightarrow \sigma = 0 \ \text{ or } \ \pi \tag{503}$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = 0 \Rightarrow 3n - 2\omega \pm \frac{B_2 - A_2}{M_2 R_2} n \left(\frac{R_2}{a}\right)^2 \frac{1}{e}\left(-\frac{21}{8} + \frac{4467}{64}e^2\right) = 0 \tag{504}$$

最後の式は自転に関する量 ω と公転に関する量 n, e を結び付ける式．最初の考察では

$$\frac{B_2 - A_2}{M_2 R_2} n \left(\frac{R_2}{a}\right)^2 \frac{1}{e}\left(-\frac{21}{8} + \frac{4467}{64}e^2\right)$$

の term がない．もっとも $R_2/a \ll 1, B_2 - A_2 \ll A_2$ より，当り前．ここで R_2 は水星の代表的大きさ． 訂正

$$\frac{d\sigma}{dt} = 0$$
$$\Rightarrow 3n - 2\omega + \frac{2C_2 - A_2 - B_2}{M_2 R^2} n \left(\frac{R_2}{a}\right)^2 \left(\frac{15}{4} + \frac{51}{8}e^2\right)$$
$$\pm \frac{B_2 - A_2}{M_2 R_2^2} n \left(\frac{R_2}{a}\right)^2 \left(-\frac{21}{8e} + \frac{4467}{64}e\right) = 0 \quad \text{for} \sigma = 0 \tag{505}$$

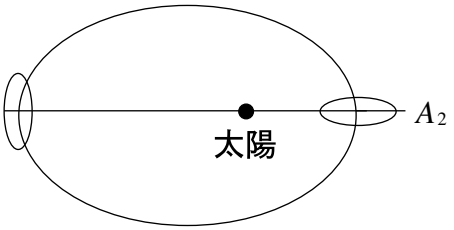

Figure 47: $\sigma = 0$．こっちの方が安定（太陽に近い方で引っ張られているから）．

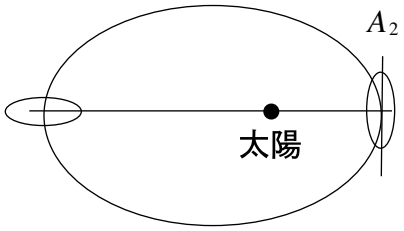

Figure 48: $\sigma = \pi$

さらに，

$$\frac{d\sigma}{dt} = 0 \Rightarrow -3\frac{\partial F^*}{\partial L} - 2\frac{\partial F^*}{\partial G} + 2\frac{\partial F^*}{\partial H} = 0 \tag{506}$$

これは A 軸が近点で同じ向きだということを表している．実際は近点も動くので γ に対してはきちんとした比では動かない．

4.8 非剛体の効果

首振りをするとき A, B, C がふらつく．つまり，対角化はすべての時間について行えない．よって E, F, G の effect をいれる．

$$A = A_0 + \Delta A, \quad B = B_0 + \Delta B, \quad C = C_0 + \Delta C, \quad D = \Delta D, \quad E = \Delta E, \quad F = \Delta F \tag{507}$$

仮定：
平均形状のまわりをゆっくりと微小振動するものとする．

$$A_0, B_0, C_0 \gg \Delta A(t), \Delta B(t), \Delta C(t), \Delta D(t), \Delta E(t), \Delta F(t) \tag{508}$$

$$1 \gg \Delta\dot{A}, \Delta\dot{B}, \Delta\dot{C}, \dot{D}, \dot{E}, \dot{F} \tag{509}$$

次，

$$\vec{v} = \vec{\omega}_2 \times \vec{r} \tag{510}$$

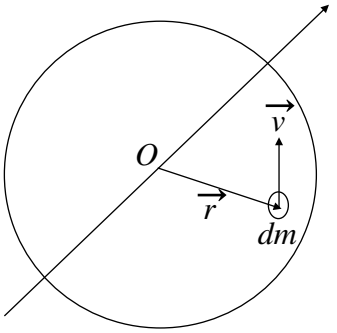

Figure 49: 角速度 $\vec{\omega}_0$

と仮定する．ここで $\vec{\omega}_0$ は A_0, B_0, C_0 で決まる角速度．

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{A}+\frac{1}{B}\right)G^2+\frac{1}{4}\left(\frac{2}{C}-\frac{1}{A}-\frac{1}{B}\right)L^2+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{B}-\frac{1}{A}\right)(G^2-L^2)\cos 2\ell \\ &\quad +\frac{D}{BC}L\sqrt{G^2-L^2}\cos\ell+\frac{E}{CA}L\sqrt{G^2-L^2}\sin\ell+\frac{F}{2AB}(G^2-L^2)\sin 2\ell \\ &\quad +\mathcal{O}(2\text{ 次}) \qquad (511) \\ F &= -T+U+K \qquad (512) \end{aligned}$$

K において $\Delta A \sim F$ は given function of t ．

$$\frac{d}{dt}(L,G,H,K)=\frac{\partial F}{\partial(\ell,g,h,k)},\quad \frac{d}{dt}(\ell,g,h,k)=-\frac{\partial F}{\partial(L,G,H,K)} \qquad (513)$$

order で分ける．

$$\begin{aligned} T &= T_0+T_1 \qquad (514) \\ T_0 &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{A_0}+\frac{1}{B_0}\right)G^2+\frac{1}{4}\left(\frac{2}{C_0}-\frac{1}{A_0}-\frac{1}{B_0}\right)L^2 \\ &\quad +\frac{1}{4}\left(\frac{1}{B_0}-\frac{1}{A_0}\right)(G^2-L^2)\cos 2\ell \qquad (515) \\ T_1 &= -\frac{1}{4}\left(\frac{\Delta A}{A_0}+\frac{\Delta B}{B_0}\right)G^2+\frac{1}{4}\left(-\frac{2\Delta C}{C_0}+\frac{\Delta A}{A_0}+\frac{\Delta B}{B_0}\right)L^2 \\ &\quad +\frac{1}{4}\left(-\frac{\Delta B}{B_0}+\frac{\Delta A}{A_0}\right)(G^2-L^2)\cos 2\ell+\frac{D}{B_0C_0}L\sqrt{G^2-L^2}\cos\ell \\ &\quad +\frac{E}{C_0A_0}L\sqrt{G^2-L^2}\sin\ell+\frac{F}{2A_0B_0}(G^2-L^2)\sin 2\ell \qquad (516) \\ F &= F_0+F_1 \qquad (517) \\ F_0 &= -\frac{1}{4}\left(\frac{1}{A_0}+\frac{1}{B_0}\right)G^2-\frac{1}{4}\left(\frac{2}{C_0}-\frac{1}{A_0}-\frac{1}{B_0}\right)L^2-K \qquad (518) \\ F_1 &= \frac{1}{4}\left(\frac{1}{A_0}-\frac{1}{B_0}\right)(G^2-L^2)\cos 2\ell-T_1+U \qquad (519) \end{aligned}$$

$(L,G,H,K;\ell,g,h,k)\to(L',G',H',K';\ell',g',h',k')$

補助方程式：

$$\frac{d}{d\tau}(L',G',H',K')=\frac{\partial F_0^*}{\partial(\ell',g',h'.k')},\quad \frac{d}{d\tau}(\ell',g',h',k')=-\frac{\partial F_0^*}{\partial(L',G',H',K')} \tag{520}$$

$$F_0^*=F_0(\vec{L}',\vec{\ell}_0) \tag{521}$$

$$L',G',H',K',h'=\text{const.}\quad \text{for}\ \ \tau \tag{522}$$

$$\ell'=n_L\tau+\text{const.},\quad n_L=\frac{1}{2}\left(\frac{2}{C_0}-\frac{1}{A_0}-\frac{1}{B_0}\right)L' \tag{523}$$

$$g'=n_G\tau+\text{const.},\quad n_G=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{A_0}+\frac{1}{B_0}\right)G' \tag{524}$$

$$k'=\tau+\text{const.} \tag{525}$$

仮定：

さらに，D,E,F などはほぼ n_L の周期で動くものとする．すると永年項が出てきそうなものは，

$$(*)=\frac{\overbrace{D}^{\text{周期}\ n_L}}{B_0C_0}L\sqrt{G^2-L^2}\ \underbrace{\cos\ell}_{\text{周期}\ n_L}+\frac{\overbrace{E}^{\text{周期}\ n_L}}{C_0A_0}L\sqrt{G^2-L^2}\ \underbrace{\sin\ell}_{\text{周期}\ n_L} \tag{526}$$

周期を ν として $(n_L\sim\nu)$，

$$D=d\cos\nu k+d'\sin\nu k,\quad E=e\cos\nu k+e'\sin\nu k \tag{527}$$

とおくと，$(*)$ は，

$$(*)\ \sim\ \frac{L\sqrt{G^2-L^2}}{C_0}\left[\alpha\cos(\ \underbrace{\ell-\nu k\beta}_{\text{危険な項}\ (n_L\sim\nu)}\ )+\cdots\right] \tag{528}$$

$$\alpha^2\ =\ \left(\frac{d}{2B_0}+\frac{e'}{2A_0}\right)^2+\left(\frac{d'}{2B_0}+\frac{e}{2A_0}\right)^2 \tag{529}$$

そこで，興味のある項だけ取り出して論じよう．

$$\begin{aligned}F^*\ =\ &-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{A_0}+\frac{1}{B_0}\right)G'^2-\frac{1}{4}\left(\frac{2}{C_0}-\frac{1}{A_0}-\frac{1}{B_0}\right)L'^2-K'\\&\underbrace{-\frac{\alpha}{C_0}L'\sqrt{G'^2-L'^2}\cos(\ell'-\nu k'-\beta)}_{\text{critical term}}+\langle U\rangle\end{aligned} \tag{530}$$

$\langle U\rangle$ ： L',G',H' だけの関数

この F^* で運動方程式を解けばよい．直ちに，$G',H'=\text{const.},k'=t$

$$\frac{dL'}{dt}=\frac{\partial F^*}{\partial\ell'}\ =\ \frac{\alpha}{C_0}L'\sqrt{G'^2-L'^2}\sin(\ell'-\nu t-\beta) \tag{531}$$

$$\frac{d\ell'}{dt} = -\frac{\partial F^*}{\partial L'} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{C_0} - \frac{1}{A_0} - \frac{1}{B_0}\right) L' + \frac{\alpha}{C_0}\left(\sqrt{G'^2 - L'^2} - \frac{L'}{\sqrt{G'^2 - L'^2}}\right) \times \cos(\ell' - \nu t - \beta) - \frac{\partial \langle U \rangle}{\partial L'} \tag{532}$$

平衡解：

$$\begin{aligned} &\ell' = \nu t + \beta \quad \text{不安定} \\ &\ell' = \nu t + \beta + \pi \quad \text{安定} \end{aligned} \tag{533}$$

$\frac{d\ell'}{dt} = \nu$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{C_0} - \frac{1}{A_0} - \frac{1}{B_0}\right) L' - \frac{\alpha}{C_0}\left(\sqrt{G'^2 - L'^2} - \frac{L'}{\sqrt{G'^2 - L'^2}}\right) - \left.\frac{\partial \langle U \rangle}{\partial L'}\right|_0 = \nu \tag{534}$$

ここで，

$$\frac{\partial \langle U \rangle}{\partial L'} \ll 1, \quad \sqrt{G'^2 - L'^2} \ll L' \tag{535}$$

より，

$$\frac{\nu}{n_G} = \underbrace{\left(\frac{2}{C_0} - \frac{1}{A_0} - \frac{1}{B_0}\right)\left(\frac{1}{A_0} + \frac{1}{B_0}\right)^{-1}}_{-\frac{1}{305}} + \underbrace{\frac{2}{C_0}\left(\frac{1}{A_0} + \frac{1}{B_0}\right)^{-1}}_{\frac{304}{305}} \frac{\alpha}{J_0} \tag{536}$$

ここで，

$$\alpha = 0.95 \times 10^{-9}, \quad J_0 = 0''.2 \quad \Rightarrow \quad \frac{\nu}{n_G} = -\frac{1}{434} \quad \text{Chandler 周期} \tag{537}$$

このようにごく小さい変位の Resonance で効いている．